

תרגול 1: חזרה מתמטית

עמר גולדברג

מייל: goldomer@post.bgu.ac.il

אתר הקורס:

http://physweb.bgu.ac.il/COURSES/ProtoCourse/index.php?folder=Physics1B/16B_Physics1B_BT

מדיניות:

- מדיניות הקורס נמצאת באתר.
- שיעורי בית יינתנו פעם בשבוע. ההגשה היא אלקטרונית באתר.
- ישנה חובת הגשה של לפחות 11 תרגילים.
- מי שיגיש 10 תרגילים, יופחתו 10% מציונו הסופי. מי שיגיש 9 או פחות, יופחתו 20% מציונו הסופי.
- ציון סופי: הגבוה מבין 100% בחינה סופית או 80% בחינה סופית ו-20% בוחן.
- קיים קישור לפורום באתר. מומלץ לשאול שם שאלות על מנת שיהיה נגיש לכולם.
- שעות קבלה יתואמו בהמשך.

נגזרות

הגדרת הנגזרת:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

לרוב הסימון הבא נשמר לגזירה לפי זמן:

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad \text{נגזרת שנייה}$$

מבחינה גרפית

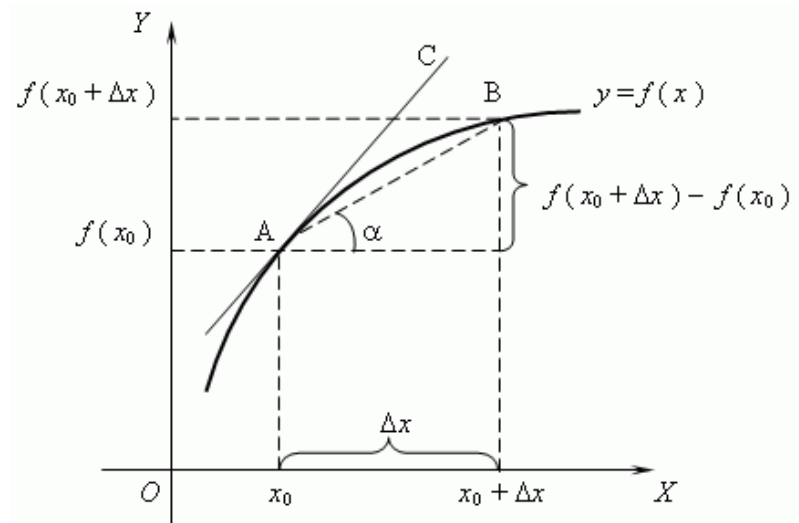


Fig. 1

לפי הגדרה נגזרת היא שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה.

- נקודת קיצון מקיימת $f'(x) = 0$ (משפט פרמה). ההפך לא תמיד נכון (נגזרת אפס יכולה להיות גם נקודת פיתול)
- נגזרת שנייה קובעת קמירות וקעירות של הפונקציה.

כללים חשובים בגזירה:

עבור $y(x), z(x)$

$$(y(x) + z(x))' = y'(x) + z'(x)$$

$$(y(x)z(x))' = y'(x)z(x) + y(x)z'(x)$$

כלל השרשרת:

עבור $z = y^2, y = \ln x$ אם נרצה לחשב את $\frac{dz}{dx}$ כלל השרשרת אומר

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dy} = z'_y = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{1}{x}$$

לכן

$$\frac{dz}{dx} = 2 \ln x \frac{1}{x}$$

נגזרת של מנה (לפי הכללים עד כה):

$$\left(\frac{y}{z}\right)' = \frac{y'}{z} + \frac{-yz'}{z^2} = \frac{y'z - yz'}{z^2}$$

תרגיל לדוגמא:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)' &= \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\right)' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right) - \frac{1}{2}}{\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)^2} \\ &= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} \end{aligned}$$

אינטגרל

קיימים שני סוגים

- אינטגרל לא מסוים
- אינטגרל מסוים

אינטגרל לא מסוים: $F(x)$ היא הפונקציה הקדומה של הפונקציה $f(x)$, כך ש $F'(x) = f(x)$. האינטגרל הלא מסוים הוא אוסף של פונקציות, כך ש $\int f(x)dx = F(x) + C$

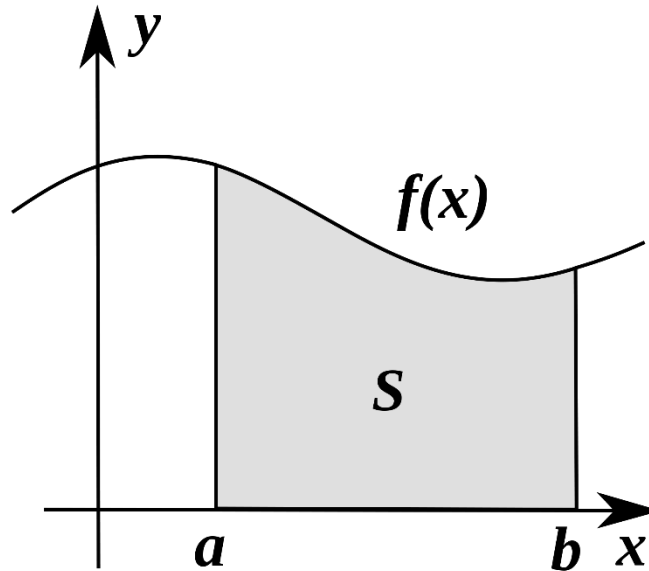
דוגמא – שימוש בהחלפת משתנה:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = [z = \cos x, dz = -\sin x dx] = -\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z} + C = \frac{1}{\cos x} + C$$

אינטגרל מסוים:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

לפי הגדרת הפונקציה הקדומה $F(x)$ של $f(x)$ – מספר השווה לשטח הכלוא בין הפונקציה לציר x בין קצוות הקטע.



דוגמא – אינטגרציה בחלקים:

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \left[\int_a^b u'(x)v(x)dx = (u(x)v(x))_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx, \right. \\ \left. \begin{array}{l} v(x) = x, \quad v'(x) = 1 \\ u'(x) = \sin x, \quad u(x) = -\cos x \end{array} \right] = (-x \cos x)_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x dx \\ = \pi - 0 + (\sin x)_0^\pi = \pi$$

יחידות

- לכל גודל פיזיקלי יש יחידות.
- אין משמעות לגודל פיזיקלי כמספר בלי יחידות (לדוגמא מסה: $m = 2$).
- יחידות גם יכולות לעזור לנו למצוא טעויות בפתרון שאלה.

נניח שעשיתי חשבון כדי לחשב מהירות, כאשר היו נתונים לי המיקומים x_1, x_2, x_3 והזמנים t_1, t_2 וקיבלתי את התוצאה:

$$v = (x_1)^3 \left(\frac{1}{(x_2)^2 t_1} + \frac{x_3}{t_2} \right)$$

אפשר לדעת בוודאות שהתוצאה אינה נכונה.

מערכות של יחידות:

ישנן מערכות יחידות שונות, הדוגמאות העיקריות הן:

- m, kg, s – MKS
- cm, g, s – cgs

מעברי יחידות:

אם נתונה מהירות $v = 10 \frac{m}{s}$, מהי המהירות בקמ"ש $\frac{km}{h}$?

$$1[km] = 1000[m] \rightarrow 1[m] = \frac{1}{1000}[km]$$

$$1[h] = 3600[s] \rightarrow 1[s] = \frac{1}{3600}[h]$$

$$10 \left[\frac{m}{s} \right] = 10 \cdot \frac{1}{1000} \cdot 3600 \left[\frac{km}{h} \right] = 36 \left[\frac{km}{h} \right]$$