תרגול #8 ־ מרכז מסה ושימור אנרגיה

7 במאי 2013

רקע תיאורטי

מרכז מסה

עד כה הסתכלנו על גוף כאילו היה נקודתי. אולם לעיתים נרצה לבחון גם על מערכת המכילה n גופים שכל אחד מהם יש מסה m_i ומיקום $\vec{r_i}$. ניתן לבחון מערכת זו כאילו היתה "גוף אחד" ולתאר אותה באמצעות משוואת תנועה יחידה (במקום n משוואות תנועה). זאת אנו עושים כאשר אנו מגדירים **מרכז מסה** של המערכת, אשר קרוי גם **מרכז כובד**. זוהי נקודה במרחב שמסת המערכת כולה מתנהגת כאילו היא מרוכזת בה.

לדוגמא: עבור שתי מסות m_1 ו־m_2 שנמצאות במיקום $\vec{r_1}$ ו־$\vec{r_2}$ בהתאמה, מיקום מרכז המסה הוא:

$$\vec{R}_{CM}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

מרכז המסה של שתי מסות נמצא **תמיד** על הקו הישר המחבר ביניהן.

עבור מס' רב יותר של מסות, נוסחת מיקום מרכז המסה היא:

$$\vec{R}_{CM}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i$$

כאשר $M=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$ היא המסה הכוללת של המערכת.

אם על המערכת **כולה** שקול הכוחות הוא אפס, אזי מיקום מרכז המסה $\vec{R}_{CM}$ ימשיך בתנועתו באותה מהירות ובקו ישר (חוק I של ניוטון ־ חוק ההתמדה).

מגדירים גם מושג של **מהירות מרכז המסה**, והיא מתקבלת על ידי גזירת **מיקום מרכז המסה** לפי הזמן:

$$\vec{V}_{CM}=\frac{d\vec{R}_{CM}}{dt}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i}{M}$$

באותו אופן, תאוצת מרכז המסה:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}_{CM}}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{F} = \frac{\vec{F}_{total}}{M}$$

תנועת מרכז המסה היא כאילו המערכת היא גוף אחד במסה M, ופועל עליה כח F_{total} שהוא שקול הכוחות.

מרכז מסה של גוף עם התפלגות רציפה

מרכז המסה אינו מושג הקשור **רק** למערכות עם מספר גופים. זהו מושג הרלוונטי גם לגוף יחיד אשר לו התפלגות מסה (צפיפות מסה) שאינה אחידה ו/או צורה שאינה סימטרית. עד כה כשעסקנו בגוף עגול כמו דיסקה או כדור או בתיבה מלבנית הגופים היו אחידים בצפיפות המסה שלהם ולכן מרכז המסה שלהם היה פשוט מרכז הכדור/דיסקה/תיבה.
כאשר הדבר אינו כך, כלומר, התפלגות מסה לא אחידה (כגון כדור עם חור שאינו במרכז) או צורה שמרכז הכובד שלה אינו במרכז (כגון חרוט) יש להשתמש בנוסחת מרכז המסה בצורתה האינטגרלית:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm = \frac{1}{M}\int \rho\left(\vec{r}\right)\vec{r}\,dV$$

dm הוא אלמנט קטן של מסה אשר שווה ל- $dm = \rho\left(\vec{r}\right)dV$, כאשר $\rho\left(\vec{r}\right)$ היא צפיפות המסה בנקודה $\vec{r}$ ו-dV הוא אלמנט נפח קטן.

תנע (קווי)

תנע הוא גודל פיזיקלי וקטורי והוא מבטא את כיוון ועוצמת התנועה של אותו גוף או קבוצת גופים במרחב. הוא מוגדר באופן הבא:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

ולמעשה, חוק II של ניוטון נוסח במקור באופן הבא (מדוייק יותר):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

חוק שימור התנע

במערכת סגורה, מערכת אשר לא פועלים עליה **כוחות חיצוניים**) התנע הכולל נשמר:

$$\vec{P}_{total} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = M\vec{V}_{CM} = Constant$$

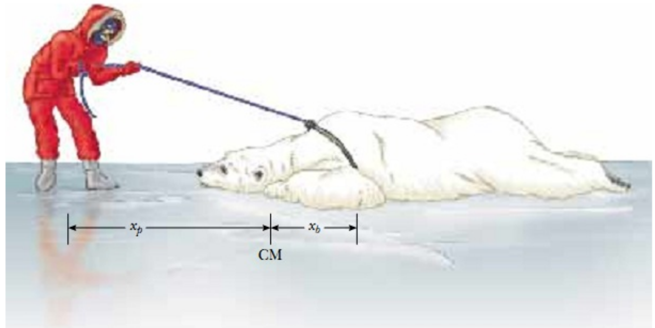
למשל, כאשר יש התנגשות גופים ושקול הכוחות על הגופים (המערכת כולה) הוא אפס, מתקיים שימור תנע. כלומר, התנע הכולל הסופי שווה לתנע הכולל ההתחלתי:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

כאשר $\vec{v}_i$ הוא התנע ההתחלתי של גוף i ו־ $\vec{u}_i$ הוא התנע הסופי שלו.

שאלה 1_4601 - דב קוטב

ביולוגית הגיעה לקוטב הצפוני על מנת לחקור את דובי הקוטב. לאחר מספר נסיונות הצליחה הביולוגית להרדים דוב אחד, אך אבוי, שומו שמיים, היא שכחה את המאזניים במעבדה.



א. איך תוכל הביולוגית, רבת התושייה, בכל זאת להעריך את מסת הדוב כאשר יש באמתחתה רק סרט מדידה וחבל, והיא אף יודעת את מסתה שלה?

ב. האם הפתרון ישאר תקף עבור תוספת של חיכוך למשטח?

פתרון

א. כפי שהציור מרמז, הפתרון מבוסס על מרכז מסה. בהעדר כוחות חיצוניים מרכז המסה של המערכת: חוקרת + דוב נשאר במקומו. החוקרת קושרת חבל לדב ומחזיקה את קצהו השני. כמו כן, היא מסמנת את מיקומה הנוכחי על הקרח.
נבחר את ראשית הצירים במיקום מרכז המסה, כלומר $X_{CM} = 0$. נוכל למצוא את הקשר בין מרחק החוקרת ממרכז המסה x_r למרחק הדוב ממרכז המסה x_b:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_r\left(-x_r\right) + m_b x_b}{m_r + m_b} \\ m_r x_r &= m_b x_b \end{aligned}$$

אולם, החוקרת לא יודעת מה מיקומה ביחס למרכז המסה x_r וגם לא את x_b ולכן משוואה זו בלבד לא עוזרת לנו כדי למצוא את מסת הדוב m_b.
הפתרון הוא למשוך קצת בחבל, הדבר יוביל לתזוזה של החוקרת $\tilde{x}_r = x_r + \Delta x_r$ וכיוון שסך הכוחות החיצוניים על שניהם שווה אפס, מיקום מרכז המסה חייב להימצא באותו מקום גם לאחר התזוזה ולכן הדוב אף הוא ישנה את מיקומו, $\tilde{x}_b = x_b + \Delta x_b$ כך שעדיין יתקיים: $\tilde{X}_{CM} = 0$.

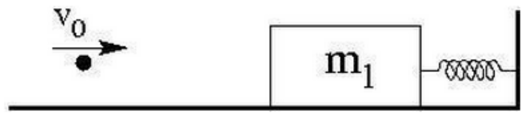
$$\begin{aligned} m_r \tilde{x}_r &= m_b \tilde{x}_b \\ m_r x_r + m_r \Delta x_r &= m_b x_b + m_b \Delta x_b \\ \Longrightarrow \qquad m_b &= m_r \frac{\Delta x_r}{\Delta x_b} \end{aligned}$$

כך, על ידי מדידת השינוי במיקום החוקרת והדוב, ניתן לגלות את מסת הדוב.

ב. כאשר יש חיכוך בין המשטח למערכת, יש כוחות חיצוניים כשהמערכת בתזוזה. התנע הכולל אינו נשמר $\Delta P_{total} \neq 0$, כלומר V_{CM} משתנה לפני ואחרי תזוזת המערכת (החוקרת + הדוב) ומרכז המסה בהחלט יכול לזוז.

שאלה 4404_1 - שימור תנע

בול עץ בעל מסה m_1 מונח על משטח אופקי ומחובר לקפיץ בעל קבוע קפיץ k. קליע בעל מסה m_2 נורה במהירות v_0 וננעץ בבול. מהי ההתכווצות המקסימלית של הקפיץ?



א. כאשר בין הבול לבין המשטח אין חיכוך.

ב. כאשר בין הבול לבין המשטח חיכוך קינטי μ.

פתרון

א. אין כוחות חיצוניים אשר פועלים על המערכת ולכן יש שימור תנע במהלך ההתנגשות:

$$\begin{aligned} p_i &= p_f \\ m_2 v_0 &= (m_1 + m_2)\, u \\ \Rightarrow \qquad u &= \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

u היא המהירות המשותפת של המסה והקליע רגע לאחר ההתנגשות. לאחר ההתנגשות כל הכוחות משמרים ויש שימור אנרגיה. על כן, האנרגיה הכוללת רגע אחרי ההתנגשות שווה לאנרגיה הכוללת כאשר הקפיץ מכווץ מקסימלית:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, u &= \frac{1}{2} k\, (\Delta x)^2 \\ \Delta x &= \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \cdot u = \frac{m_2 v_0}{\sqrt{k\,(m_1 + m_2)}} \end{aligned}$$

ב. ברגע ההתנגשות לפני שהמסה צוברת מהירות החיכוך אינו משחק תפקיד, ולכן ישנו עדיין שימור תנע והמהירות רגע אחר ההתנגשות נשארה כפי שחושבה בסעיף א. אולם כעת, אין לנו שימור אנרגיה וחלק ממנה מתבזבז בגלל העבודה המתבצעת על ידי כוח החיכוך:

$$\begin{aligned} W_{friction} &= \Delta E = \Delta K + \Delta U_{sp} \\ -\mu\, (m_1 + m_2)\, g \Delta x &= 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, u^2 + \frac{1}{2} k\, (\Delta x)^2 - 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= (\Delta x)^2 + 2\frac{\mu}{k}(m_1 + m_2)\, g\Delta x - \frac{m_1 + m_2}{k} u^2 \\
\Delta x_{1,2} &= \frac{-\mu (m_1 + m_2)\, g \mp \sqrt{\mu^2 (m_1 + m_2)^2 g^2 - k (m_1 + m_2) u^2}}{k}
\end{aligned}
$$