תרגול #13 - תנע זוויתי

16 ביוני 2013

רקע תיאורטי

תנע זוויתי

התנע הזוויתי הוא למעשה מדד לסיבוביות של גוף מסתובב

$$
\begin{aligned}
\vec{l} &= \vec{r} \times \vec{p} \\
|\vec{l}| &= rp\sin\alpha
\end{aligned}
$$

לא לשכוח - גם כאן $\vec{r}$ משמעותו מרחק הזרוע מציר הסיבוב (ולא מנקודת מרכז המסה).

חוק השני של ניוטון

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\
\frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}
\end{aligned}
$$

כיוון ש-$\vec{v}||\vec{v}$ ולכן המכפלה הוקטורית $\vec{v} \times \vec{v} = 0$. עבור מספר גופים במערכת: $\vec{L} = \sum_i \vec{l_i}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\
\vec{\tau} &= I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) \\
\vec{L} &= I\vec{\omega}
\end{aligned}
$$

חוק שימור תנע זוויתי

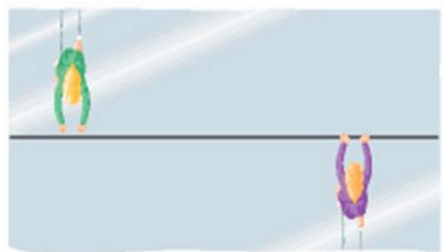
כאשר שקול מומנט הכח החיצוני שווה אפס, יש שימור תנע זוויתי:

$$
\sum \vec{\tau} = 0
$$

$$\vec{L} = const$$

שאלה 1_6601 - מחליקות על הקרח

שתי מחליקות על הקרח מתאמנות ברחבה, לכל אחת מסה M. הן מתקרבות אחת כלפי השניה במהירות v כל אחת (ביחס למרכז מסה) במסלולים מקבילים שהמרחק ביניהם הוא $3L$.
מחליקה אחת נושאת מוט בעל מסה זניחה. המחליקה השניה אוחזת בקצה המוט כאשר הן חולפות זו ליד זו.



א. תארו בצורה כמותית את תנועת המחליקות לאחר ששתיהן אוחזות במוט.

ב. מהי האנרגיה הקינטית של המחליקות?

ג. בשלב הבא, המחליקות מתקרבות לאורך המוט עד שהמרחק ביניהן הוא L. מהי המהירות הזוויתית שלהן כעת?

ד. מהי האנרגיה שלהן?

ה. הסבירו משיקולי אנרגיה כיצד האנרגיה הקינטית עלתה?

פתרון

א. שתי המחליקות ינועו במעגל שרדיוסו $R = \frac{3}{2}L$ סביב מרכז המוט. התנע הזוויתי הכולל סביב מרכז המוט ברגע אחיזתו:

$$\vec{L} = \sum \vec{r} \times \vec{p} = (RMv + RMv)\,\hat{z} = 2M\left(\frac{3}{2}L\right)v\hat{z} = 3MLv\hat{z}$$

מצד שני, ישנו גם הביטוי:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= I\vec{\omega} = \left(MR^2 + MR^2\right)\omega\hat{z} \\ &= 2M\left(\frac{3}{2}L\right)^2\omega\hat{z} = \frac{9}{2}ML^2\omega\hat{z}\end{aligned}$$

מתוך השוואה של שני הביטויים עבור התנע הזוויתי, אנו מקבלים:

$$\omega = \frac{2v}{3L} = \frac{v}{R}$$

ב. התנע הקווי הכולל לפני רגע המפגש היה אפס:

$$P = Mv + M(-v) = 0$$

ומאחר ושקול הכוחות החיצוניים שווה לאפס, התנע הקווי הכולל לאחר המפגש אף הוא צריך להיות שווה לאפס. על כן, תהיה רק תנועה מעגלית. האנרגיה הקינטית ניתנת על ידי:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{9}{2}ML^2\left(\frac{2v}{3L}\right)^2 = Mv^2$$

ג. כעת המחליקות מתקרבות אחת לשניה והמרחק של כל אחת ממרכז המוט $R_f = \frac{1}{2}L$. שקול מומנטי הכח בשלב זה שווה לאפס (מדוע?) ולכן יש לנו שימור תנע זוויתי:

$$\begin{aligned}
L_i &= L_f \\
MR_iv_i = MR_i^2\omega_i &= MR_f^2\omega_f = MR_fv_f \\
\omega_f &= \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2\omega_i = \left(\frac{\frac{3}{2}L}{\frac{1}{2}L}\right)^2\omega_i = 9\omega_i = \frac{6v}{L} \\
I_i\omega_i &= I_f\omega_f \\
\omega_f &= \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{\frac{9}{2}ML^2}{\frac{1}{2}ML^2}\omega_i = 9\omega_i\frac{6v}{L}
\end{aligned}$$

ד. האנרגיה הקינטית החדשה:

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}I_f\frac{I_i^2}{I_f^2}\omega_i^2 = \frac{I_i}{I_f}\frac{1}{2}I_i\omega_i = \frac{\frac{9}{2}ML^2}{\frac{1}{2}ML^2}K_i = 9K_i = 9Mv^2$$

ה. יש שינוי באנרגיה הקינטית, כלומר, נעשה עבודה. המחליקות הפעילו כח על המוט לאורכו (משכו במוט) על מנת שיוכלו להתקרב יותר למרכז. כח זה הוא לאורכו של המוט, ולכן גם לאורכו של התתקדמות ΔR, דבר הנותן עבודה (כח לאורך מסלול תנועה) שונה מאפס.