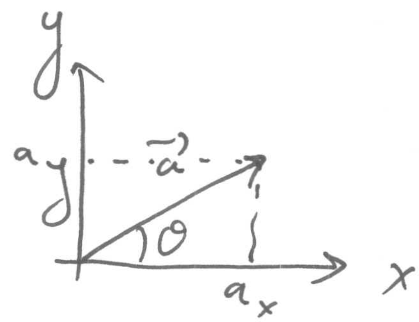
תרגול 2 - וקטורים:

וקטור הוא יצור מתמטי בעל 3 רכיבים. לוקטור, בניגוד לסקלאר, יש גם גודל וגם "כיוון".

במישור:

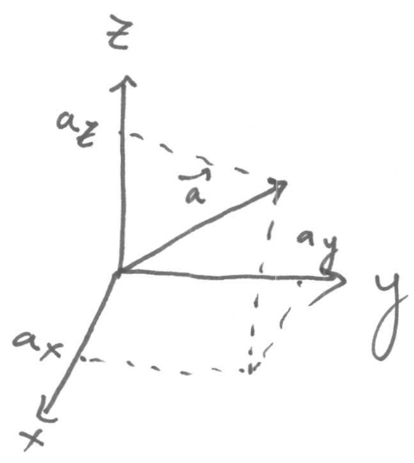


• סימון -
$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = (a_x, a_y)$$

• גודל -
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

• זווית -
$$tg\theta = a_y/a_x$$

במרחב:



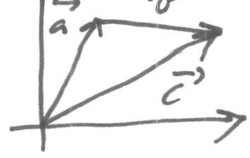
• סימון -
$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

• גודל -
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

פעולות עם וקטורים:

• חיבור ("ראש לזנב"):
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{x} + (a_y + b_y)\hat{y} + (a_z + b_z)\hat{z}$$

באופן גרפי:



• כפל סקלארי:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=x}^{z} a_i b_i = $$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_{ab}$$

כאשר θ היא הזוית בין הוקטורים.

• כפל וקטורי:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y}(a_x b_z - a_z b_x) + \hat{z}(a_x b_y - a_y b_x)$$

גודל - $|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta_{ab}$

• וקטור יחידה $\hat{a}$ הוא וקטור שגודלו 1 וכיוונו בכיוון $\vec{a}$:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow \vec{a} = |\vec{a}|\hat{a}$$

תרגילים:

1-1402

① בהינתן הוקטורים $\vec{v}$ ו- $\vec{w}$ עם הנורמות $v=|\vec{v}|$ ו- $w=|\vec{w}|$ ועם הזוית ϕ בין $\vec{v}$ ל- $\vec{w}$ -

א. חשבו את הנורמה של הוקטור $\vec{w}-\vec{v}$.

ב. מצאו את הזוית שבין $\vec{w}-\vec{v}$ ל- $\vec{v}$.

ג. חשבו שנית את הסעיפים הקודמים עבור -

$v=12,\ w=9,\ \phi=0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\pi$

ד. ציירו את $\vec{v},\vec{w},\vec{w}-\vec{v}$ עבור $\phi=\pi/6$.

פתרון:

א. נורמה של וקטור נתונה לפי שורש המכפלה הסקלרית שלו בעצמו:

$$|\vec{v}-\vec{w}|=\sqrt{(\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w})}=\left[v^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}+w^2\right]^{1/2}=$$

$$=\left[v^2+w^2-2vw\cos\phi\right]^{1/2}$$

ב. נסמן את הזוית הנדרשת ב- ψ:

$$\vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=v|\vec{v}-\vec{w}|\cos\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\psi=\frac{\vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{w})}{v|\vec{v}-\vec{w}|}=\frac{v^2-vw\cos\phi}{v\left[v^2+w^2-2wv\cos\phi\right]^{1/2}}$$

ג'+ד' - להשלים לבד.

<u>1-1403</u>

② נתונים הוקטורים $\vec{v}_i$, $i=1,2,3$ המקיימים $\sum_{i=1}^{3}\vec{v}_i=0$. הראו:

א. $$\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\vec{v}_2\times\vec{v}_3=\vec{v}_3\times\vec{v}_1$$

ב. $$\frac{v_1}{\sin\theta_{12}}=\frac{v_2}{\sin\theta_{31}}=\frac{v_3}{\sin\theta_{12}}$$

<u>פתרון:</u>

א.
$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\{\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=0\}=$$
$$=-\vec{v}_1\times(\vec{v}_1+\vec{v}_3)=-\cancelto{0}{\vec{v}_1\times\vec{v}_1}-\vec{v}_1\times\vec{v}_3=$$
$$=\vec{v}_3\times\vec{v}_1\ //$$
$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2=-\vec{v}_2\times\vec{v}_1=\vec{v}_2\times(\vec{v}_2+\vec{v}_3)=\vec{v}_2\times\vec{v}_3\ //$$

ב. $$|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|=|\vec{v}_3\times\vec{v}_1|\Rightarrow \cancel{v_1}v_2\sin\theta_{12}=v_3\cancel{v_1}\sin\theta_{31}$$
$$\Rightarrow \frac{v_2}{\sin\theta_{31}}=\frac{v_3}{\sin\theta_{12}}\quad,\dots\ //$$

__1.1 [illegible]__ $\vec{r} = r\hat{r}$; $\hat{r} = \cos\omega t\,\hat{x} + \sin\omega t\,\hat{y}$ בהינתן (3)

ו- $r = const$, חשבו-

א. $\frac{d\vec{r}}{dt}$ - ?

ב. $\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ - ?

__פתרון:__

__א.__ גוזרים כל רכיב בנפרד:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\cos\omega t\,\hat{x} + r\sin\omega t\,\hat{y}\right) = \{r = const\} =$$

$$= -\omega r\sin\omega t\,\hat{x} + \omega r\cos\omega t\,\hat{y} = \omega r\hat{\varphi}$$

__ב.__ לפי כלל השרשרת:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \cancelto{0}{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt}} + \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} =$$

$$= \vec{r} \times \frac{d}{dt}\left(\omega r\hat{\varphi}\right) = \omega r\,\vec{r} \times \dot{\hat{\varphi}} =$$

$$= \omega r\,\vec{r} \times \left[-\omega\cos\omega t - \omega\sin\omega t\right] =$$

$$= -\omega^2 r\,\vec{r} \times \hat{r} = -(\omega r)^2\,\hat{r} \times \hat{r} = 0$$