Parameters:

$L = 2[m]$,$m_1 = 5[kg]$,$m_2 = 0.01[kg]$,$v = 400[m/s]$,$x = 0.1[m]$

a. Conservation on angular momenta around the rod's axis (The gravity is parallel to the displacement vector):

$$L_z = (L - x)m_2 v \sin(90) = I\omega \tag{1}$$

The moment of inertia of the rod and the bullet is:

$$I = \frac{m_1 L^2}{12} + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(L - x)^2 \tag{2}$$

So the angular velocity after the collision:

$$\omega = \frac{(L - x)m_2 v \sin(90)}{\frac{m_1 L^2}{12} + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(L - x)^2} \tag{3}$$

b. The distance between the axis and the center of mass:

$$L_{cm} = \frac{m_1 \frac{L}{2} + m_2(L - x)}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

Using conservation of energy:

$$\frac{I\omega^2}{2} = (m_1 + m_2)gL_{cm}(1 - \cos\varphi) \tag{5}$$

$$(1 - \cos\varphi) = \frac{I\omega^2}{2g(m_1 \frac{L}{2} + m_2(L - x))} \tag{6}$$

$$\varphi = \cos^{-1}(1 - \frac{I\omega^2}{2g(m_1 \frac{L}{2} + m_2(L - x))}) \tag{7}$$

קליפה וגלגלת

בדרך כלל (אבל ממש לא תמיד), אם שאלות מבקשות תאוצה, צריך לחשב כוחות. ואם הן מבקשות מהירות, הדרך היא אנרגיה. אם נקבע את גובה היחוס במיקום העכשווי של הקופסא הירוקה, אז בתחילת התנועה האנרגיה היא אפס. מכיוון שצירי הגלגלות לא זזים, הגלגלות אינן מבצעות עבודה (על אף שהן מפעילות כוח). אם כך האנרגיה אחרי גובה h צריכה להיות זהה לאנרגיה בתחילה, 0.

$$0 = -m_2gh + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

העניין הוא שמכיוון שאין החלקה בגלגלות, יש קשר בין מהירותן הזוויתית לבין מהירות החבל:

$$\omega_1 \cdot R = v_2$$

וגם:

$$\omega_2 \cdot r_2 = v_2$$

לכן נוכל לרשום את משוואת שימור האנרגיה כך:

$$\begin{aligned} 2m_2gh &= m_2v_2^2 + I_1\left(\frac{v_2}{R}\right)^2 + I_2\left(\frac{v_2}{r_2}\right)^2 \\ 2gh &= v_2^2 + \frac{I_1}{m_2R^2}v_2^2 + \frac{I_2}{m_2r_2^2}v_2^2 \\ v_2^2 &= \frac{2gh}{1 + \frac{I_1}{m_2R^2} + \frac{I_2}{m_2r_2^2}} \end{aligned}$$

בשביל התאוצה, נצטרך לחשב כוחות ומומנטים. נסמן את החבל האנכי בT_2, ואת החבל האופקי בT_1. נרשום את החוק השני של ניוטון לשלושת הגופים. על הגוף הירוק נקבל:

$$m_2g - T_2 = m_2a_2$$

על הגלגלת הכחולה נחשב מומנטים, ונקבל:

$$T_2r_2 - T_1r_2 = I_2\alpha_2$$

ועל הקליפה האפורה:

$$T_1R = I_1\alpha_1$$

מכיוון שאין החלקה, והקשר בין המהירויות שמצאנו קודם נשמר תמיד, ניתן לגזור אותו ולקבל קשר בין התאוצות הזוויתיות לקוויות:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_2}{R} \\ \alpha_2 &= \frac{a_2}{r_2} \end{aligned}$$

כך שסט המשוואות שקיבלנו מהחוק השני הוא:

$$\begin{aligned} m_2g - T_2 &= m_2a_2 \\ T_2r_2 - T_1r_2 &= I_2\frac{a_2}{r_2} \\ T_1R &= I_1\frac{a_2}{R} \end{aligned}$$

קצת סדר באלגברה:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \tag{1}$$
$$T_2 - T_1 = I_2 \frac{a_2}{r_2^2} \tag{2}$$
$$T_1 = I_1 \frac{a_2}{R^2} \tag{3}$$

ועכשיו נחבר את שלושת המשוואות יחד:

$$m_2 g - T_2 + T_2 - T_1 + T_1 = m_2 a_2 + \frac{I_2}{r_2^2} a_2 + \frac{I_1}{R^2} a_2$$
$$a_2 = \frac{g}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}}$$

וזו התאוצה. שימו לב שאם לגלגלות לא הייתה מסה, היינו מקבלים שהגוף נופל בתאוצה הכובד, אבל מכיוון שיש להן מסה הוא נופל לאט יותר.

בקשר למתיחויות, פשוט צריך לעבוד עם סט המשוואות שכבר היה לנו. המתיחות בחבל האופקי ניתנת על ידי משוואה (3)

$$T_1 = \frac{I_1}{R^2} a_2 = \frac{I_1}{R^2} \frac{g}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}}$$

והחבל האנכי ממשוואה (1)

$$T_2 = m_2 g - m_2 a_2 = m_2 g - \frac{m_2 g}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}} = \frac{m_2 g \left(\frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2} \right)}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}}$$

בקשר למומנטי ההתמד, מומנט ההתמד של הקליפה הוא:

$$I_1 = \frac{2}{3} m_1 R^2$$

ואת מומנט ההתמד של הגלגלת נחבר מספר מומנטי התמד של דיסקאות:

$$I_2 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 r_2^2$$

נחשב את המהירות שחייבת להיות לכדור בהגיעו לשיא הגובה על מנת שישלים סיבוב. נעשה זאת באמצעות שיקולי כוחות. בנקודת שיא הגובה:

$$\sum F_y = 0 = m\frac{v^2}{R} - mg - N \rightarrow N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

סיבוב שלם יושלם אם בנקודה הזו הנורמאל יהיה גדול מאפס, ולכן:

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) > 0 \rightarrow v^2 > gR$$

כעת, נחפש גובה שחרור שיניב מהירות שכזו בנקודה הקריטית. שיקולי שימור אנרגיה נותנים:

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

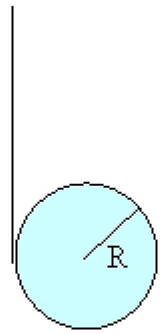
נשתמש בעובדה שאין החלקה כך ש- $\omega = v/r$ ונציב את מומנט ההתמד הנתון בבעיה:

$$mgH = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v^2}{r^2}\right) = 2mgR + \frac{7}{10}mv^2$$

נבודד את המהירות ונדרוש את התנאי שקיבלנו מקודם:

$$v^2 = \frac{10g}{7}\left(H - 2R\right) > gR \rightarrow \boxed{H > \frac{27}{10}R}$$

פתרון תרגיל 6409 1:



משוואת כוחות:

$$\sum F_y = ma = mg - T$$

משוואת מומנטים סביב מרכז המסה (נבחר את כיוון השעון ככיוון חיובי):

$$\sum \tau = I\alpha = TR$$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים, יחד עם הקשר $a = \alpha R$ הנובע מהעובדה שהיויו מתגלגל ללא החלקה ונקבל לבסוף:

$$\boxed{T = \frac{mgI}{I + mR^2}; a = \frac{mgR^2}{I + mR^2}}$$

1_6600

$m = 30\ kg$ $\quad M = 100\ kg$ $\quad I = 150\ kg \cdot m^2$

$\tilde{m} = 1\ kg$ $\quad R = 2\ m$

$V = 12\ m/s$ $\quad \theta = 37°$

ג) $J_i = \tilde{m} V_\perp R = \tilde{m} V \cos 37\, R$

$J_f = (I + mR^2)\omega$

$J_i = J_f \Rightarrow (I + mR^2)\omega = \tilde{m} V \cos\theta\, R$

$$\omega = \frac{\tilde{m} V \cos\theta\, R}{I + mR^2} = \frac{1 \cdot 12 \cdot \cos 37 \cdot 2}{150 + 30 \cdot 4} = 0.07\ \frac{rad}{sec}$$

ד) $V = \omega R = 0.14\ m/s$

$$dmv + \underbrace{I_1 \omega_1}_{=0} = dmu + I_1 \omega_2 \quad ; \; I = \frac{MR^2}{2}.$$

(c

$$\omega_2 = \frac{dm(v-u)}{I_1} = \frac{0.15 \cdot 0.01\,(400-200)}{2 \cdot 0.2^2/2} = 7.5\ \frac{rad}{sec}$$

(d

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mu^2}{2} - \frac{I_1 \omega_2^2}{2} = 598.875\ J$$