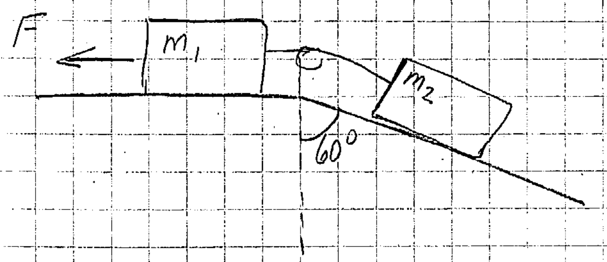
בס"ד

1 - 3111

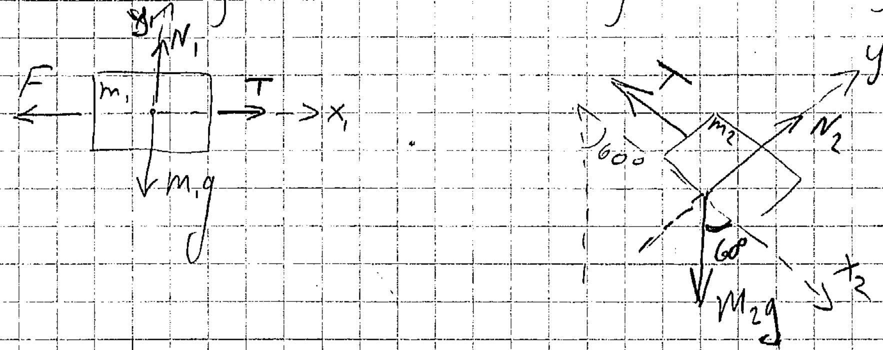


נתונים:

$m_1 = 15\ kg$

$m_2 = 30\ kg$

תרשימי כוחות - לכל גוף בנפרד ואת צירים נפרדים:



$(1)\ \sum F_{x_1} = T - F = m_1 a$

$(2)\ \sum F_{y_1} = N_1 - m_1 g = 0$

$(3)\ \sum F_{x_2} = m_2 g\cos(60^\circ) - T = m_2 a$

$(4)\ N_2 - m_2 g \sin(60^\circ) = 0$

* **הערות:** בגלל שהחוט משותף לשני הגופים,
המתיחות היא זהה בשניהם,
והתאוצה של הגופים זהה גם כן.

מתוך משוואות (1)+(3) נקבל:

$$m_2 g \cos(60^\circ) - F = (m_1 + m_2) a$$

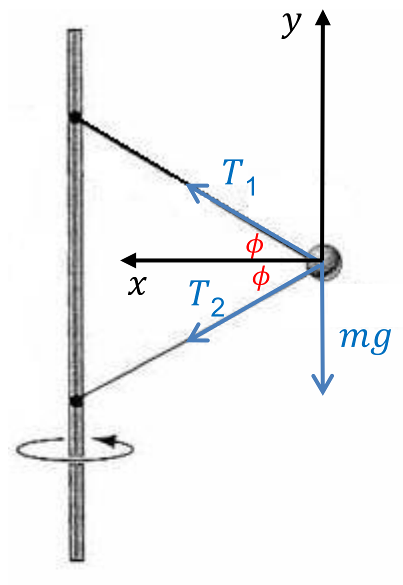
א. אם נדרוש $a=0$ (תנועה במהירות קבועה):

$$m_2 g\cos(60^\circ) - F = 0$$

$$F = m_2 g\cos(60^\circ) = 30 \cdot 9.8 \cdot 0.5 \approx 147\ N$$

ב. נדרוש: $a = 2\ m/s^2$

$$F = m_2 g\cos(60^\circ) - (m_1 + m_2)\cdot a = 147 - 90 = 57\ N$$



רדיוס הסיבוב הוא קו ישר בין הכדור למוט לאורך ציר x, כלומר מאונך למוט. לכן,

$$\cos\phi = \frac{R}{l} \Rightarrow R = l\cos\phi$$

נתון שאורך כל אחד מהחוטים הוא $1\ \mathrm{m}$. ϕ היא חצי זווית הראש של המשולש (נתונה, $60°$), לכן $\phi = 30°$. מכאן,

$$R = 1\cdot\cos 30°\ \ \mathrm{m} = 0.866\ \mathrm{m}$$

מהירות הסיבוב היא $v = \omega R = 2\pi R/T$, כאשר T הוא זמן המחזור. הקשר בין התדירות f ל-T הוא $f = \frac{1}{T}$, ונתון $f = 5\ \mathrm{Hz}$. לכן,

$$v = 2\pi R\cdot f = 2\cdot\pi\cdot 0.866\cdot\ 5 = 27.21\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

את המתיחויות בחוטים נמצא על ידי כתיבת חוק שני של ניוטון עבור הכדור:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_1\sin\phi - T_2\sin\phi - mg = 0$$

$$\sum F_x = ma_{\mathrm{rad}} \Rightarrow T_1\cos\phi + T_2\cos\phi = m\frac{v^2}{R}$$

נחלק את המשוואה עבור ציר y ב-$\sin\phi$ ואת המשוואה עבור x ב-$\cos\phi$, ונקבל

$$T_1 - T_2 = \frac{mg}{\sin\phi}$$

$$T_1 + T_2 = m\frac{v^2}{R\cos\phi}$$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל

$$T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{v^2}{R\cos\phi} + \frac{g}{\sin\phi}\right) = 503.6\ \mathrm{N}$$

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{v^2}{R\cos\phi} - \frac{g}{\sin\phi}\right) = 483.6\ \mathrm{N}$$

כאשר $m = 1\ \mathrm{kg}$.

1. עבור גוף א', נבחר את כיוון ציר ה-x החיובי להיות שמאלה, ועבור שני הגופים כיוון ציר ה-y החיובי למעלה. נרשום חוק שני של ניוטון עבור גוף א' (A) כאשר המערכת בשיווי משקל כלומר $\sum \vec{F} = 0$:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T + f_s - F\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - F\sin\theta - m_{\mathrm{A}}g = 0 \Rightarrow N = F\sin\theta + m_{\mathrm{A}}g$$

ועבור גוף ב' (B):

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T - m_{\mathrm{B}}g = 0 \Rightarrow T = m_{\mathrm{B}}g$$

נציב במשוואה הראשונה את הביטוי עבור T:

$$m_{\mathrm{B}}g + f_s - F\cos\theta = 0$$

מכאן

$$f_s = F\cos\theta - m_{\mathrm{B}}g$$

הנחנו שכיוון כוח החיכוך הסטטי הוא שמאלה. את הכיוון האמיתי נקבע בהצבת נתונים מספריים...

2. כאשר המערכת במנוחה המשוואות מהסעיף הקודם מתקיימות. מהמשוואה האחרונה:

$$F\cos\theta - m_{\mathrm{B}}g = f_s \le f_{s,\max} = \mu N$$

$$F\cos\theta - m_{\mathrm{B}}g \le \mu N$$

$$F\cos\theta - m_{\mathrm{B}}g \le \mu(F\sin\theta + m_{\mathrm{A}}g) = \mu F\sin\theta + \mu m_{\mathrm{A}}g$$

נסדר את המשוואה כדי לבודד את F:

$$F(\cos\theta - \mu\sin\theta) \le \mu m_{\mathrm{A}}g + m_{\mathrm{B}}g$$

$$F \le \frac{\mu m_{\mathrm{A}}g + m_{\mathrm{B}}g}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$

$$F_{\max} = \frac{\mu m_{\mathrm{A}}g + m_{\mathrm{B}}g}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$

3. כעת $\vec{F} = 0$. נמצא את תאוצת הגוף מתוך החוק השני של ניוטון. החיכוך קינטי ולכן הוא פועל ימינה, מנוגד לכיוון תנועת גוף א'. עבור גוף א':

$$x:\quad T - f_k = m_{\mathrm{A}}a$$

$$y:\quad N - m_{\mathrm{A}}g = 0 \Rightarrow N = m_{\mathrm{A}}g$$

מכאן,

$$f_k = \mu N = \mu m_{\mathrm{A}}g$$

$$\Rightarrow T - \mu m_{\mathrm{A}}g = m_{\mathrm{A}}a$$

עבור גוף ב':

$$y: \quad T - m_{\mathrm{B}}g = -m_{\mathrm{B}}a$$

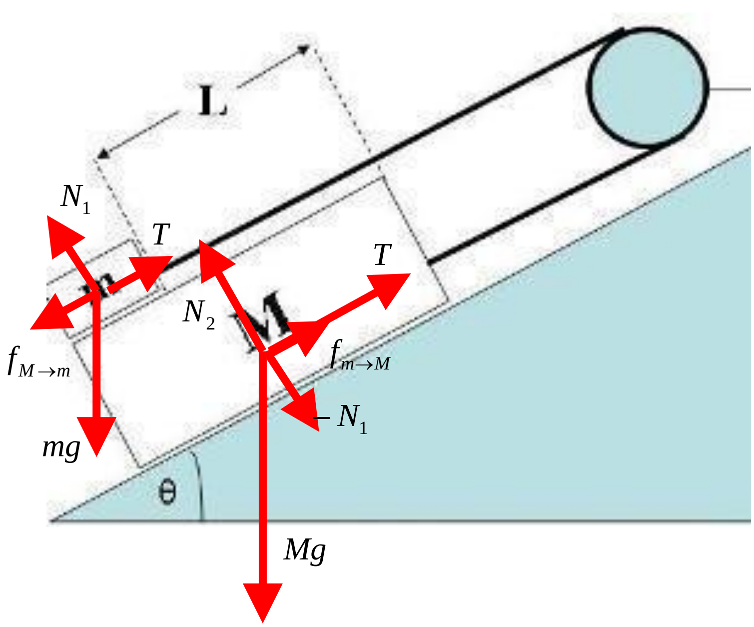
סימן המינוס באגף ימין נובע מכך שהנחנו שגוף ב' נע למטה (הכיוון החיובי הוא כלפי מעלה). נחסר את המשוואה האחרונה מהמשוואה הקודמת לה:

$$(T - \mu m_{\mathrm{A}}g) - (T - m_{\mathrm{B}}g) = m_{\mathrm{A}}a - (-m_{\mathrm{B}}a)$$

$$m_{\mathrm{B}}g - \mu m_{\mathrm{A}}g = m_{\mathrm{A}}a + m_{\mathrm{B}}a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_{\mathrm{B}}g - \mu m_{\mathrm{A}}g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$$

דיאגרמת כוחות על שני הגופים:



שני גופים עם חיכוך

יש שני גופים עם חיכוך ביניהם, אשר מחוברים בחבל דרך גלגלת.
משוואות החוק השני של ניוטון נותנות (במערכת צירים משופעת, ימינה x ולמעלה y):

$$\begin{pmatrix}T\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}-mg\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N_1\end{pmatrix}=m\vec{a}_1$$
$$\begin{pmatrix}T\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f\\0\end{pmatrix}-Mg\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\N_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N_2\end{pmatrix}=M\vec{a}_2$$

שימו לב שבחרנו כאן שהחיכוך פועל שמאלה על הגוף הקטן. זה נובע מההנחה שמסתו קטנה יותר והוא מושך פחות. אם טעינו, הסימן של כוח החיכוך פשוט יהיה שלילי. כמו כן, החיכוך על הכוח הגדול מגיע מהגוף הקטן, בהשלמה עם חוקו השלישי של ניוטון.
אנחנו מאלצים את הגופים לנוע בכיוון השיפוע x) ובתאוצה מנוגדת (כי הם מחוברים לאותו חוט):

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$$
$$\vec{a}_2=-\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$$

נציב את זה לשתי המשוואות הוקטוריות ונקבל 5 משוואות ב4 נעלמים:

$$\begin{aligned}&T-f-mg\sin\theta=ma\\&-mg\cos\theta+N_1=0\\&T+f-Mg\sin\theta=-Ma\\&-Mg\cos\theta-N_1+N_2=0\\&f=\mu N_1\end{aligned}$$

נחסר את השלישית מהראשונה:

$$-2f+(M-m)g\sin\theta=(m+M)a$$
$$(m+M)\neq 0$$
$$a=\frac{M-m}{M+m}g\sin\theta-2\frac{\mu N_1}{M+m}=\frac{(M-m)\sin\theta-2\mu m\cos\theta}{M+m}g$$

כדאי לבדוק את הפתרון להגיון פיסיקלי. היחידות של המסה מצטצמות ונשארות יחידות של תאוצה. ויש עוד בדיקות שרצוי לעשות (זווית 90 או אפס, וכדומה).
בסעיף הבא, שני הגופים נעים באותה תאוצה לכיוונים שונים. גוף שנע בתאוצה קבועה, ומתחיל ממנוחה, נע ב $x=\frac{at^2}{2}$.
לכן:

$$x_1=\frac{at^2}{2}$$
$$x_2=-\frac{at^2}{2}$$
$$x_1-x_2=L$$
$$at^2=L$$
$$t=\sqrt{\frac{L}{a}}$$

ניקוי חלונות

ישנם שני גופים רלוונטים, הלוח ור'. כל התנועה בציר אחד, ולכן אין צורך בכתיב וקטורי. נסמן קואורדינטה y כלפי מעלה.

על האיש פועלים:

$$N_1 + T - m_1 g = m_1 a_1$$

על הלוח פועלים:

$$T - N_1 - m_2 g = m_2 a_2$$

התאוצה של שניהם חייבת להיות זהה כדי שהאיש לא יעוף מהלוח. נחבר כדי להפטר מהנורמל:

$$2T - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

שאלו מה צריך להיות הכוח שפועל על החבל כשהמהירות קבועה (תאוצה אפס), כלומר מה המתיחות:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} g = 560N$$

הכוח שפועל על הלוח זה הנורמל, ואותו נקבל מחיסור של המשוואות:

$$2N_1 - m_1 g + m_2 g = 0$$

$$N_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{2} = 160N$$

שימו לב שאם אתם קלים יותר מהמשטח שעליו אתם עומדים, כדאי לכם או להפעיל כוח בכיוון אחר (לא רק מטה), או להאיץ ולא להשאר במהירות קבועה. כי הנורמל לא יכול להיות שלילי.

הכוח על החבל בשביל תאוצה שלילית קבועה הוא:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}(g + a) = 504N$$

שזה פחות כוח, גם כן תוצאה מתבקשת.

בחלק השני של השאלה, צריך להוסיף משוואת חוק שני עבור הגלגלת השניה. נקרא לחוט החדש T_2. המשוואה על הגלגלת החדשה:

$$2T - T_2 = 0 \cdot a_{pulley} = 0$$

המשוואה על הקרש גם משתנה, מכיוון שהחוט המחובר אליה שונה:

$$T_2 - N_1 - m_2 g = m_2 a$$

המשוואה על ר' לא השתנתה:

$$N_1 + T - m_1 g = m_1 a$$

נציב את המשוואה על הגלגלת במשוואה על הקרש:

$$2T - N_1 - m_2 g = m_2 a$$

לקבלת הכוח על החוט נפטר מהנורמל על ידי חיבור:

$$3T = (m_1 + m_2)(g + a)$$

$$T = \frac{m_1 + m_2}{3}(g + a) = \frac{2}{3}\frac{m_1 + m_2}{2}(g + a)$$

כלומר הפתרונות לסעיפי המתיחות בחוט (תאוצה 0 ותאוצה -1) הם שני שליש מהפתרונות הקודמים. זה אומר שיותר קל להשאר בתאוצה קבועה במערכת החדשה שר' בנה.

בשביל לקבל משוואה על הנורמל, עלינו לכפול את המשוואה הראשונה ב2, ולחסר, כדי להפטר מהמתיחות.

$$3N_1 = 2m_1(g + a) - m_2(a + g)$$

$$N_1 = (\frac{2}{3}m_1 - \frac{1}{3}m_2)(a + g)$$

משולש וריבוע

מכיוון ששואלים על תנועה יחסית בין המסות, נעבור למערכת המנוחה של המסה הגדולה (מערכת לא אינרציאלית!). נסמן x ימינה ו y למעלה.

במערכת זו, משוואות החוק השני של ניוטון, כשכבר נציב את העובדה שהתאוצה 0, אבל נוסיף חיכוך, הן:

$$f\cos\alpha + N_1\sin\alpha - M_1A = 0 \tag{1}$$

$$-f\sin\alpha - M_1g + N_1\cos\alpha = 0 \tag{2}$$

$$F - N_1\sin\alpha - f\cos\alpha - M_2A = 0 \tag{3}$$

$$N_2 - M_2g - N_1\cos\alpha + f\sin\alpha = 0 \tag{4}$$

בקשר לחיכוך, פשוט קבעתי כיוון באופן שרירותי, ובפתרון עצמו אתייחס לשתי האפשרויות: שצדקתי בבחירתי וסימן החיכוך יהיה חיובי, או שטעיתי וסימן החיכוך שלילי. מה שחשוב לשים לב אליו זו העקביות בבחירה מבחינת הצירים ומבחינת הגופים. על פי החוק השלישי של ניוטון, אנו יודעים שאם פועל על גוף כוח, פועל כוח מנוגד על גוף אחר. לכן אם מופיע בגוף הראשון למשל $f\sin\alpha$, אז בשני יופיע מינוס של אותו דבר. כנ"ל כמובן ברכיבים השונים של הנורמל.

משוואה 4 רק מוסיפה עוד נעלם לא דרוש (N_2), ולכן נתעלם ממנה.

בסעיף א', החיכוך הוא אפס, ולכן נציב $f = 0$. נחבר את משוואות ציר הx , כלומר 1 + 3 ונקבל:

$$F = (M_1 + M_2)A$$

נסדר את 2 מחדש לקבל:

$$N_1 = \frac{M_1g}{\cos\alpha}$$

ונציב את זה ב1:

$$M_1A = \frac{M_1g}{\cos\alpha}\sin\alpha = M_1g\tan\alpha$$

הצבה של המשוואה הקושרת בין הכוח לתאוצה נותנת:

$$F = (M_1 + M_2)g\tan\alpha$$

בסעיף ב', רוצים את הכוח המינימלי והמקסימלי. זה קורה כאשר החיכוך או הכי ימינה או הכי שמאלה, כלומר או פלוס או מינוס μ_sN. נפתור במכה את שתי האפשרויות על ידי שימוש ב $f = \pm\mu_sN_1$.

נמצא את N_1. בעזרת נוסחא 2.

$$\mp\mu_sN_1\sin\alpha - M_1g + N_1\cos\alpha = 0$$

$$(\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha)N_1 = M_1g$$

$$N_1 = \frac{M_1g}{\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha}$$

נציב ב1:

$$M_1A = f\cos\alpha + N_1\sin\alpha = N_1\left(\pm\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha\right) = \frac{M_1g\left(\pm\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha\right)}{\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha}$$

$$F = A(M_1 + M_2) = g(M_1 + M_2)\frac{(\pm\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha} = g(M_1 + M_2)\frac{(\sin\alpha \pm \mu_s\cos\alpha)}{\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha}$$

$$F = g(M_1 + M_2)\frac{(\tan\alpha \pm \mu_s)}{1 \mp \mu_s\tan\alpha}$$