① תפוח נופל מגובה של 2 מטרים ופוגע בקרקע לאחר t_1 שניות.

נניח ש:

$$t_1 = C m^{\alpha} h^{\beta} g^{\gamma}$$

כאשר
m - מסת התפוח
h - הגובה
g - תאוצת הכובד.

א. מצא ~~את~~ המעריכים הנ"ל בעזרת שיקולי יחידות

ב. מאיזה גובה יש להפיל את התפוח על-מנת שזמן הנפילה יוכפל?

<u>תשובה:</u> נשווה יחידות ⇐

$$T = M^{\alpha} L^{\beta} \left(\frac{L}{T^2}\right)^{\gamma}$$
$$= M^{\alpha} L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma}$$

לכן האפשרות היחידה היא

$$\gamma = -\frac{1}{2}$$
$$\alpha = 0$$
$$\beta = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$t_1 = C\sqrt{\frac{h}{g}}$$

ב. על מנת להכפיל את הזמן פי 2 צריך להכפיל את הגובה פי 4.

We need the mass flow rate as a function of the rest of the parameters, let's write:

$$Q = r^{\alpha} \rho^{\beta} \eta^{\gamma} \Delta p^{\delta}$$

Or, using dimensional analysis:

$$[Q] = \frac{M}{T} = L^{\alpha} \frac{M^{\beta}}{L^{3\beta}} \frac{M^{\gamma}}{L^{\gamma} T^{\gamma}} \frac{M^{\delta}}{L^{2\delta} T^{2\delta}} = L^{\alpha - 3\beta - \gamma - 2\delta} M^{\beta + \gamma + \delta} T^{-\gamma - 2\delta}$$

We know that $\gamma = -1$ from the question, so we have-

$$\begin{cases} \gamma = -1 \\ \alpha - 3\beta - \gamma - 2\delta = 0 \\ \beta + \gamma + \delta = 1 \\ -\gamma - 2\delta = -1 \end{cases}$$

Solve and get- $\alpha = 4; \beta = 1; \gamma = -1; \delta = 1$. So-

$$Q \sim \frac{r^4 \rho \Delta p}{\eta}$$

And the most contributing factor is the radius of the channels.

מפתחות ותפיסתן

נבנה מערכת קואורדינטות, בה גובה הזריקה הוא 0, הציר החיובי כלפי מעלה, ורגע הזריקה הוא ב $t = 0$.
במערכת זו, הנתונים שניתנו לנו הם:

- גובה החלון: $y_1 = h = 4m$
- רגע התפיסה: $t_1 = 1.5s$
- הגוף נמצא בנפילה חופשית, ולכן תאוצתו קבועה, ושווה ל: $a = -g \approx -10\frac{m}{s^2}$

מכיוון שהמפתח בנפילה חופשית עם תאוצה קבועה, ניתן להשתמש במשוואות שקיבלנו לתנועה בתאוצה קבועה:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

למעשה, עבור רגע התפיסה, הכל נתון לנו פרט למהירות ההתחלתית:

$$y_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$$

קצת אלגברה והעברת אגפים מביאה אותנו ל:

$$v_0 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{gt_1}{2}$$

ומי שרוצה להציב:

$$v_0 = \frac{4m}{1.5s} + \frac{10\frac{m}{s^2}1.5s}{2} = \frac{61}{6}\frac{m}{s}$$

בסעיף הבא אנו נדרשים לחשב את מהירות המפתח ברגע התפיסה. הכל נתון לנו עכשיו, כולל המהירות ההתחלתית. נשתמש בנוסחא למהירות בתאוצה קבועה (שהיא כמובן הנגזרת של נוסחת המיקום):

$$v(t_1) = v_0 - gt_1 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{gt_1}{2} - gt_1 = \frac{y_1}{t_1} - \frac{gt_1}{2}$$

נציב מספרים ונקבל:

$$v(t_1) = \frac{4m}{1.5s} - \frac{10\frac{m}{s^2}1.5s}{2} = -\frac{29}{6}\frac{m}{s}$$

התוצאה השלילית בעצם מראה לנו שהשותפה תפסה את המפתח במהלך ירידתו ולא עלייתו (בדר"כ באמת יותר נוח לתפוס ככה).

שימו לב: כרגיל, המשכנו כמה שאפשר עם אותיות לפני הצבת המספרים. כולל בהצבה של v_0. גם אם בהתחלה זה לא נראה רלוונטי, זה בטוח יותר אלגנטי, וגם עוזר להבנה הפיסיקלית. במקרה שלפנינו, רואים למשל שהגבהת הגובה (y_1) תעלה את מהירות הזריקה ומהירות בתפיסה בדיוק באותה מידה.

פתרון- e_07_5_033

$$x = 6+2t+5t^2$$

א. ניתן להשוות את הביטוי של x לביטוי של תנועה בתאוצה קבועה:

$$x = 6+2t+5t^2 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

ולפי השוואת מקדמים: - $5t^2 = \frac{1}{2}at^2$

$$a = 10$$

ב. באותו אופן, המיקום ההתחלתי $x_0 = 6$

המהירות ההתחלתית $v_0 t = 2t$

$v_0 = 2$

דרך אחרת לחשב מהירות ותאוצה - ע"י גזירה:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2+10t, \quad v_0 = 2+10\cdot 0 = 2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 10$$

ג. ביטוי כללי למהירות הגוף:

$$v(t) = 2+10t$$

ד. מהירות בזמן $t=4_s$: $v(t=4) = 2+10\cdot 4 = 42$

מכונית מול אופניים

קודם כל נחליט על מערכת צירים. הבחירה הטריוויאלית היא שהאפס ברמזור, והכיוון החיובי בכיוון תנועת האופניים והמכונית.

האופניים נעות במהירות קבועה, עם מיקום התחלתי $x = 0$, ולכן המיקום שלהן יהיה:

$$x_{bicycle} = \int v dt = v_{bicycle} t$$

לעומתן, המכונית מאיצה בתאוצה קבוע, עם מיקום התחלתי $x = 0$, ומהירות התחלתית $v = 0$, ולכן התנועה שלה תתואר על ידי:

$$x_{car} = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2}$$

שאלו לאחר כמה זמן הם יפגשו, כלומר מתי המיקום שלהם יהיה זהה:

$$x_{car} - x_{bicycle} = 0$$

$$\frac{at^2}{2} - v_{bicycle} t = 0$$

$$\frac{a}{2} t \left(t - \frac{2}{a} v_{bicycle} \right) = 0$$

למשוואה זו יש שני פתרונות, ב$t = 0$, ישנו רגע שינוי הרמזור, בו המכונית והאופניים היו באותו המקום, והפתרון השני, אותו למעשה ביקשו, הוא:

$$t = \frac{2}{a} v_{bicycle} = \frac{2}{5\frac{m}{s^2}} \cdot 30 \frac{KM}{H} = \frac{2}{5\frac{m}{s^2}} \cdot 30 \frac{1000m}{3600s} = \frac{10}{3} s$$

בסעיף הבא מבקשים את המרחק בין נקודת העקיפה לנקודת ההתחלה של המכונית. בנקודת העקיפה המכונית והאופניים נמצאות באותו מקום, לכן ניתן להציב בשתי הנוסחאות. מטעמי פשטות נציב בנוסחא של האופניים לקבלת:

$$x_{bicycle} = v_{bicycle} t = \frac{2}{a} v_{bicycle}^2 = \frac{250}{9} m$$

כרגיל, הקפדנו לשמור על האותיות עד הרגע האחרון.

גרף של רץ באימון

א. מהירות היא נגזרת של המיקום. לכן, המרחק הוא האינטגרל על המהירות:

$$x = \int v dt$$

אינטגרל שווה לשטח שמתחת לגרף, ולכן נוכל למצוא את המרחק שעבר הרץ בעזרת חישוב השטח הגיאומ-טרי מתחת לגרף. יש לנו משולש, טרפז ושני מרובעים. השטח הוא:

$$x = \frac{1}{2} 2s \cdot 8\frac{m}{s} + 8s \cdot 8\frac{m}{s} + 2s \cdot \frac{8+4}{2}\frac{m}{s} + 4s \cdot 4\frac{m}{s} = 100m$$

ב. יש ארבעה חלקים, כאשר בכל אחד מהם המהירות בקו ישר, ולכן הנגזרת קבועה. בחלק הראשון התאוצה חיובית, בשלישי שלילית, ובשני וברביעי התאוצה 0. התאוצות הן לפי השיפוע:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{8\frac{m}{s}-0}{2s-0} = 4\frac{m}{s^2} & 0 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t < 10 \\ \frac{4\frac{m}{s}-8\frac{m}{s}}{12s-10s} = -2\frac{m}{s^2} & 10 \leq t < 12 \\ 0 & 12 \leq t < 16 \end{cases}$$

עכשיו יש למצוא את נוסחת המיקום לכל קטע. הקטע הראשון מתחיל במהירות אפס, ומיקום אפס, ולכן פונקצית המיקום היא פשוט:

$$x(t) = \frac{4\frac{m}{s^2}t^2}{2} \qquad 0 \leq t < 2$$

בחלק השני, יש תנועה במהירות קבועה, שידועה מהגרף ולכן:

$$x(t) = c_1 + \left(8\frac{m}{s}\right)t \qquad 2 \leq t < 10$$

את הקבוע נמצא על ידי הצבת הקצה $t = 2s$, בשתי המשוואות, לפני הנקודה ואחריה:

$$\frac{4\frac{m}{s^2}(2s)^2}{2} = c_1 + \left(8\frac{m}{s}\right)(2s)$$
$$c_1 = 8m - 16m = -8m$$

$$x(t) = 8\frac{m}{s}t - 8m \qquad 2 \leq t < 10$$

בחלק השלישי, התנועה בתאוצה קבועה, ויש שני קבועים:

$$x(t) = c_2 + c_3 t - \frac{2\frac{m}{s^2}}{2}t^2 \qquad 10 \leq t < 12$$

נמצא אותם על ידי שתי השוואות, של המיקום ושל המהירות (נגזרת המיקום), בנקודה $t = 10s$.

$$c_3 - 2\frac{m}{s^2}(10s) = 8\frac{m}{s}$$
$$c_3 = 28\frac{m}{s}$$
$$c_2 + 28\frac{m}{s}(10s) - \frac{2\frac{m}{s^2}}{2}(10s)^2 = 8\frac{m}{s}(10s) - 8m$$
$$c_2 = -108m$$

$$x(t) = -1\frac{m}{s^2}t^2 + 28\frac{m}{s}t - 108m \qquad 10 \leq t < 12$$

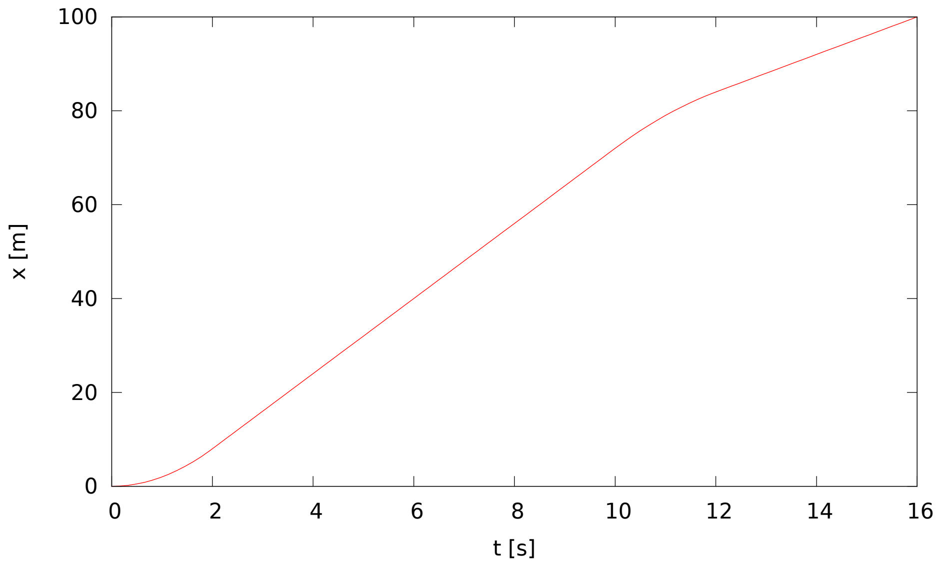
בחלק הרביעי ואחרון (סוף סוף), שוב המהירות קבועה וידועה מהגרף, ויש קבוע אחד. אני סומך עליכם שתדעו איך מוצאים אותו.

$$x(t) = 4\frac{m}{s}t + 36m \qquad 12 \leq t < 16$$

לסיכום:

$$x(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{4\frac{m}{s^2}t^2}{2} & 0 \leq t < 2 \\ x(t) = 8\frac{m}{s}t - 8m & 2 \leq t < 10 \\ x(t) = -1\frac{m}{s^2}t^2 + 28\frac{m}{s}t - 108m & 10 \leq t < 12 \\ x(t) = 4\frac{m}{s}t + 36m & 12 \leq t < 16 \end{cases}$$

והגרף:



ג. הדרך הפשוטה למהירות ממוצעת היא המרחק הכולל חלקי הזמן. את המרחק בזמן $t = 10s$, נוכל למצוא מהצבה במשוואות שמצאנו:

$$x(t = 10s) = 8\frac{m}{s}(10s) - 8m = 72m$$

ולכן המהירות הממוצעת:

$$\overline{v} = \frac{x(t = 10s) - x(t = 0)}{10s} = 7.2\frac{m}{s}$$

ד. התאוצה: