השאלה:

מטוטלת מתמטית (מטוטלת פשוטה) שמסתה m, ואורכה L, מתנודדת מתקרת מעלית שמאיצה כלפי מעלה בתאוצה a . מהו זמן המחזור של המטוטלת?

א $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

ב $2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$.

ג $2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$.

ד $2\pi\sqrt{\frac{L}{a}}$.

פתרון:

התשובה הנכונה היא : ב'

חישוב:

זמן המחזור של מטוטלת מתמטית תלוי באורכה ובתאוצה שפועלת עליה, כאשר המעלית מאיצה בתאוצה a משקל המטוטלת משתנה לפי g+a, ולכן כך ישתנה גם זמן המחזור שלה:

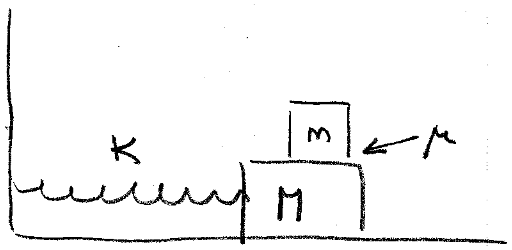
משוואת החוק השני של ניוטון בניסוח עבור מומנטים הוא: $m(g+a)L\sin(\theta)=I\alpha$, כאשר $\alpha=\ddot{\theta}$ ומומנט ההתמד ביחס לציר הוא $I=mL^2$, עבור זוויות קטנות ניתן לקרב את סינוס הזווית לזווית עצמה: $\sin(\theta)\approx\theta$ מתקבלת המשוואה:

$$m(g+a)l\theta=mL^2\ddot{\theta}$$

לאחר פישוט נקבל משוואה המתארת תנועה הרמונית פשוטה: $\ddot{\theta}=\frac{(g+a)}{L}\theta$ כלומר, התדירות הזוויתית של התנועה הוא $\omega=\sqrt{\frac{(g+a)}{L}}$ מכאן שזמן המחזור לתנועה הוא $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{(g+a)}}$

1_ SIOS

(3) שני בלוקים וקפיץ על שולחן ללא חיכוך. בין הבלוקים $\mu_s = 0.42$. אם אין החלקה בין הבלוקים מה האמפליטודה המקסימלית האפשרית של התנודות.



נתון:

$m = 1.22\ kg$

$M = 8.73\ kg$

$K = 344\ N/m$

$\mu_s = 0.42$

פתרון:

הכח המקסימלי שיכול להאיץ את m.

$$f_{max} = \mu_s N = \mu_s m g$$

$$a_{max} = \frac{f}{m} = \mu_s g$$

אמפליטודה מקסימלית.

$$X_m = \frac{a_m}{w^2}$$

$$w^2 = \frac{K}{m+M} \rightarrow X_m = \frac{\cancel{a_m}\, \mu_s g}{K/(m+M)}$$

$$X_M = \frac{(0.42)(1.22\,kg + 8.73\,kg)(9.8\,m/s^2)}{344\,N/m} = 0.119m$$

בין הקפיץ לקפיץ

גוף מחובר לקפיצים זהים $(k = 200N/M)$ משני צידיו. הגוף מוסט שמאלה מרחק $x_1 = 20cm$ ומשוחרר.
את תדירות תנועתו נקבל מהמשוואה על התאוצה:

$$ma = \sum F = -kx - kx$$
$$a = -\frac{2k}{m}x$$

לכן אנו רואים שהתנועה ההרמונית היא עם תדירות:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

האנרגיה במהלך התנועה נשמרת, ולכן ניתן לחשב אותה בכל שלב. השלב הנוח יהיה בדיוק כשהגוף משוחרר, כך שהמהירות 0 ומיקומו x_1:

$$E = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = kx_1^2 = 200\frac{N}{m} \cdot (0.2m)^2 = 200 \cdot 0.04N \cdot m = 8J$$

את המיקום כפונקציה של הזמן נקבל מתוך ידיעתנו את משוואות התנועה בתנועה הרמונית:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$x(0) = x_1$$
$$v(0) = 0$$
$$A = x_1$$
$$\varphi = 0$$
$$x(t) = x_1\cos(\omega t)$$

הגוף יגיע לנקודה הנמצאת $5cm$ מימין לנקודת שיווי המשקל כש:

$$x(t) = -5cm$$
$$x(t) = x_1\cos(\omega t) = -5cm$$
$$\cos(\omega t) = -\frac{5cm}{x_1}$$
$$t = \frac{1}{\omega}\arccos(-\frac{5cm}{20cm})$$
$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}}\arccos(-1/4) \approx \sqrt{\frac{1kg}{400N/m}}1.82 \approx 0.09s$$

שני קפיצים ושתי מסות

ישנם שני קפיצים זהים

$$k_A = k_B = 500N/M$$

שמחוברים למסות

$$m_A = m_B = 1kg$$

בשלב הראשון מזיזים רק את A, ואז יש לנו תנועה הרמונית של גוף בודד על קפיץ בודד עם זמן התדירות הידועה

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k_A}{m_A}} = \sqrt{\frac{500N/m}{1kg}} = \sqrt{500}\frac{1}{s}$$

הגוף מוזז שמאלה ל $x_0 = 10cm$ ומשוחרר. הוא מספיק להגיע מהקצה חזרה לנקודת הריפיון של הקפיץ עד שהוא מתנגש בB. זה בעצם רבע מתנועתו המלאה, ולכן לוקח לו רבע זמן מחזור עד שהוא נפגש עם B:

$$t_{AB} = \frac{T_A}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{500}\frac{1}{s}} \approx 0.07s$$

ואין בכלל תלות בכמה רחוק הוא הוסט שמאלה.

את המהירות בזמן הפגיעה ניתן לחשב בשני אופנים. או בעזרת שימור האנרגיה:

$$\frac{k_A x_0^2}{2} = \frac{m v_A^2}{2}$$

או, בעזרת הידיעה שבתנועה הרמונית המהירות המקסימלית שווה לתדירות כפול המשרעת. (תגזרו את הביטוי למיקום בתנועה הרמונית כדי להבין מאיפה זה מגיע).

$$v_A = \omega x_0 = \sqrt{500}\frac{1}{s}0.1m = \sqrt{5}\frac{m}{s}$$

עכשיו הגופים מתנגשים אלסטית. כדי לחשב את המהירות של הגוף המשותף נשתמש בשימור תנע (שקיים רק ברגע ההתנגשות):

$$m v_A = 2mu$$

$$u = \frac{1}{2}v_a = \frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{m}{s}$$

עכשיו יש לנו תרגיל חדש בעצם, עם מסה כפולה ושני קפיצים, שדומה מאוד לתרגיל 1_5100. תדירות התנועה היא:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{2m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{500}\frac{1}{s}$$

שזו בעצם בדיוק התדירות שהייתה קודם.

מהפגיעה עד לנקודה שבה יעצרו שתי המסות חולף רבע זמן מחזור, אותו כבר מצאנו בסעיף קודם:

$$\frac{T}{4} \approx 0.07s$$

זמן המחזור גם הוא פשוט:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{500}}s$$

סוף סוף בסעיף ד צריך את המשרעת. נמצא אותה מתנאי ההתחלה (המהירות כשהגופים ב$x = 0$). משוואות המיקום, וכנגזרת המהירות הן:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

כדי לקיים את תנאי ההתחלה מיקום אפס, ומהירות ידועה, נבחר $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, והמשרעת:

$$A = \frac{u}{\omega} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{m}{s}}{\sqrt{500}\frac{1}{s}} = \frac{1}{20}m = 0.05m$$

$$x(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin(\omega t)$$

רוצים $1cm$ ימינה:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.01m = x_2 \\ A\sin(\omega t) &= x_2 \\ t &= \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{x_2}{A}\right) = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{0.01m}{0.05m}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{500}\frac{1}{s}}\arcsin(0.2) \approx 0.09s \end{aligned}$$

בסעיף האחרון מבקשים את המשרעת אותה כבר היינו צריכים למצוא:

$$A = 0.05m$$