גוף מחליק

נפתור את השאלה ע"י חישוב העבודה שנעשתה על הגוף, והשוואת עבודה זו להפרש האנרגיה הקינטית.
על הגוף פועלים שלושה כוחות: הכובד (mg), הנורמל (N), והחיכוך (f).
הנורמל תמיד ניצב לתנועה, ולכן לא מבצע עבודה.

1. בקטע המעגלי (A-B) כיוון כוח הכובד הוא כלפי מטה, והחלק הרלוונטי מכוח זה (המקביל לכיוון התנועה) הוא: $mg\cos\theta$
כיוון כוח החיכוך הוא תמיד נגד כיוון התנועה, וגודלו משתנה על פי הנוסחא שניתנה לנו בשאלה.
המסלול שלנו הוא לאורך קשת המעגל, ולכן : $ds = Rd\theta$
לסיכום, סך העבודה שנעשתה על הגוף בקטע המעגלי היא:

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (mg\cos\theta - \frac{b}{\pi^4}\theta^3)Rd\theta = \left(mg\sin\theta - \frac{b}{\pi^4}\frac{\theta^4}{4}\right)R\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = mgR - \frac{b}{\pi^4}\frac{\pi^4}{64} = mgR - \frac{b}{64}R$$

נשאלנו מה יהיה המקדם b כך שמהירות בנקודה B תהיה זהה למהירות בנקודה A, כלומר שסך העבודה שנעשתה על הגוף היא אפס. התשובה היא כש $b = 64mg$

2. בסעיף זה שואלים, עם המקדם b שמצאנו, מה יהיה המרחק B-C. למעשה, אם המקדם b הוא שמצאנו, אנחנו יודעים שלא התבצעה על הגוף עבודה בקטע המעגלי, ולכן מהירותו בנקודה B שווה למהירותו ההתחלתית v0 מהנקודה A!
אז השאלה היא מה המרחק שיעבור גוף עם מהירות התחלתית v0, כאשר פועל עליו חיכוך עם המקדם μ
מכיוון שהגוף מונח על השולחן, ולא מאיץ בכיוון האנכי, הנורמל שווה לכוח הכובד (N=mg). ולכן החיכוך הקינטי הוא:
$f_k = \mu N = \mu mg$
ורק החיכוך הקינטי עושה עבודה (הכובד והנורמל אנכים לתנועה). נחשב את העבודה לאורך קטע באורך L.

$$W = \int_0^L -\mu mg dx = -\mu mgL$$

עכשיו נוסיף את התנאי שהמהירות הסופית היא 0, ובעזרת משפט העבודה-אנרגיה :

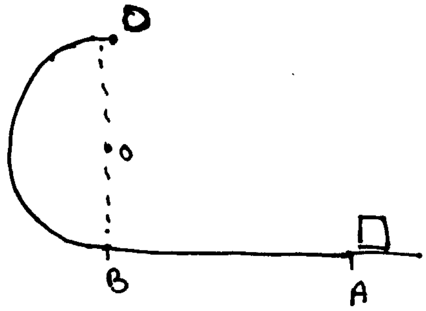
$$m\frac{0^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = W = -\mu mgL$$

$$L = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

וזו התשובה לשאלה. כדאי לבדוק שהיחידות מסתדרות.

4.6 28-09-01

א)

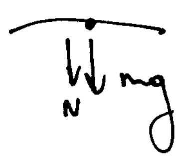


יש שימור אנרגיה היות והמשטח חלק ולכן:

$$E_i = E_f$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_c \qquad h_c = 2R$$

נמצא את V_D ~~הקריטית~~ (המינימלית) V הדרושה ~~להשלמת~~ לסגור התנועה.



נסתכל על נק׳ D:

בנק׳ D:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$\Sigma F_r = \frac{mv_D^2}{R}$$

$$N + mg = \frac{mv_D^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad V_D = \sqrt{\frac{NR}{m} + gR}$$

את המהירות הקריטית נקבל כאשר $N=0$ כלומר:

$$\boxed{V_{D_c} = \sqrt{gR}}$$

②

חזרה לשם (1):

$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}m\cdot gR + mg(2R)$$

$$V_A^2 = gR + 4gR$$

$$V_A = \sqrt{5gR}$$

(ג) נפתור סעיף זה ע"י קינמטיקה.
נחשב תחילה כמה זמן ייקח לגוף לפול ~~ב~~ גובה של (2R).

$$y = y_0 + V_{oy}\cdot t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$0 = 2R + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4R}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

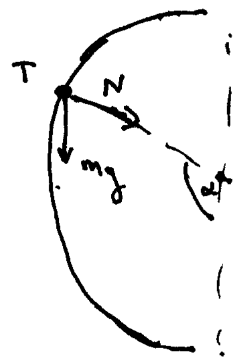
כעת נחשב את המרחק האופקי שהגוף עבר בזמן זה.
נשים לב שבנק' D המהירות שחישבנו בסעיף ב' V_{D_c} -
היא ~~בכיוון~~ בכיוון האופקי בלבד (משיק).

$$X = X_0 + V_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

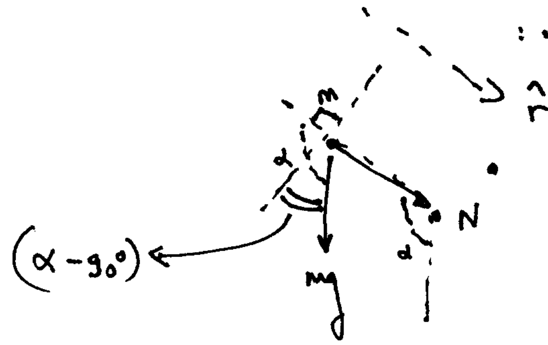
ביחס לנק' B $\rightarrow X = V_{0x}\cdot t = \sqrt{gR}\cdot\sqrt{\frac{4R}{g}} = 2R \Longrightarrow$ $(a_x = 0)$

תשובה סופית:
הכדור יפגע
ביחס לנק' A:
במרחק של $S-2R$

ג. הגוף יתנתק מהמסלול בנקודה בה $N=0$.



נבחר מערכת צירים כך:



$$\Sigma F_r = m \cdot a_r$$

$$N + mg\sin(\alpha - 90^\circ) = m \cdot a_r$$

בנק׳ T בה מתקיים הניתוק $N=0$ ולכן:

$$mg\sin(\alpha-90^\circ) = m \cdot a_r$$

$$(1)\quad \cancel{m}g\sin(\alpha-90^\circ) = \frac{\cancel{m}V_T^2}{R}$$

נסתכל על שימור האנרגיה:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mV_T^2 + mgh_T \qquad h_T = R + R\sin(\alpha-90^\circ)$$

$$V_A = 0.9 \cdot \sqrt{5gR} = \sqrt{4.05\,gR}$$

$$\Rightarrow \quad V_T^2 = V_A^2 - 2gh_T \quad ,$$

(4)

(ii) $V_T^2 = 4.05gR - 2gR\left[1+\sin(\alpha-90^\circ)\right]$

נציב את הביטוי שקיבלנו עבור V_T^2 במשוואה (i) ונקבל:

$g:/$ $\quad \cancel{m}g\sin(\alpha-90^\circ) = \cancel{m}\;4.05g - 2g\cancel{R}\left[1+\sin(\alpha-90^\circ)\right]$

$$3\sin(\alpha-90^\circ) = 2.05$$

$$\sin(\alpha-90^\circ) = 0.68$$

$$\Rightarrow \quad \alpha-90^\circ = 43.10^\circ$$

$$\alpha = 133.10^\circ$$

ב"ה

1_4117 - פתרון:

נתונים:

$$F(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 5\\ 10 & 5\le x\le 15\\ 40-2x & 15\le x\le 20\end{cases}$$

$$m=5\,kg,\quad v_0=4\,m/s.$$

א. עבודה בכל אחד מהקטעים:

$$W_1=\int_{x=0}^{x=5}F_1(x)\,dx=\int_0^5 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^5=25\,j \quad (1)$$

$$W_2=\int_{x=5}^{x=15}F_2(x)\,dx=\int_5^{15}10\cdot dx=\left[10x\right]_5^{15}=10(15-5)=100j \quad (2)$$

$$W_3=\int_{x=15}^{x=20}F_3(x)\,dx=\int_{15}^{20}(40-2x)\,dx=\left[40x-x^2\right]_{15}^{20}= \quad (3)$$

$$=40\cdot 20-20^2-40\cdot 15+15^2=25\,j$$

ב. לפי משפט עבודה-אנרגיה, השינוי באנרגיה הקינטית שווה לסך כל העבודה:

$$\Delta E=W_1+W_2+W_3=150\,j$$

ג. $$\Delta E=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_1^2=v_0^2+\frac{2\Delta E}{m}$$

מהירות הגוף לאחר 20 מטרים - $v_1=\sqrt{v_0^2+\frac{2\Delta E}{m}}=\sqrt{16+\frac{2\cdot 150}{5}}\approx 8.72\,m/s$

תנועה מעגלית זקופה

על מנת שהגוף יבצע תנועה מעגלית זקופה, נדרוש שהחוט יהיה מתוח בכל עת ($T \geq 0$). הנקודה הקריטית ביותר היא כשהגוף בשיא הגובה. מהירותו שם היא v_0. לכן, תאוצתו הרדיאלית לכיוון מרכז המעגל היא $\frac{v_0^2}{l}$. נרשום את משוואת החוק השני של ניוטון עבור הנקודה הכי גבוהה:

$$T + mg = m\frac{v_0^2}{l}$$
$$m\frac{v_0^2}{l} - mg = T \geq 0$$
$$v_0 \geq \sqrt{gl}$$

מעניקים לכדור $v_0 = 2\sqrt{gl}$. אנחנו יודעים על פי הסעיף הראשון שהגוף אכן יבצע תנועה מעגלית זקופה. אפשר למצוא את מהירות הגוף בכל זווית בעזרת משוואת שימור האנרגיה. נקבע את האפס במרכז המעגל, ונקבל:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl\cos\theta$$
$$v^2 = v_0^2 + 2gl(1-\cos\theta) = 4gl + 2gl - 2gl\cos\theta = 2gl(3-\cos\theta)$$

אז יש לנו גוף שנע בתנועה מעגלית, ואנחנו יודעים את מהירותו בכל עת. על מנת לקבל את המתיחות בחוט, נרשום את משוואות החוק השני עבור הציר הרדיאלי :

$$T + mg\cos\theta = ma_r = m\frac{v^2}{l}$$
$$T = m\frac{v^2}{l} - mg\cos\theta = mg(6-2\cos\theta) - mg\cos\theta = mg(6-3\cos\theta)$$

אומרים לנו שהחוט יקרע בT_{max}. כלומר ב:

$$T = mg(6-3\cos\theta) = T_{max}$$
$$6mg - T_{max} = 3mg\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{6}{3} - \frac{T_{max}}{3mg} = 2 - \frac{3.6}{3} = 0.8$$

את המהירות כפונקציה של הזווית כבר מצאנו מזמן, רק נציב את הזווית שחישבנו:

$$v_1 = \sqrt{gl(6-2\cos\theta)} = \sqrt{4.4gl}$$

לסעיף האחרון אנחנו צריכים את הרכיב האנכי של המהירות, ואת גובה הגוף ברגע הניתוק. יש לנו את גודל המהירות ואת הזווית, ולכן הכל ידוע. גובה הנתק (ביחס ל0 שקבעתי במרכז המעגל) הוא:

$$y_1 = l\cos\theta = 0.8l$$

ורכיב הy של המהירות:

$$v_{1y} = -v_1\sin\theta = -v_1\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{4.4gl}\sqrt{0.36} = -\sqrt{1.58gl}$$

נותר רק לרשום את משוואות התנועה של הגוף:

$$y = y_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$$

$$-3l = 0.8l - \sqrt{1.58gl}t - g\frac{t^2}{2}$$

$$\frac{g}{2}t^2 + \sqrt{1.58gl}t - 3.8l = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-\sqrt{1.58gl} \pm \sqrt{1.58gl + 4 \cdot 3.8l \cdot \frac{g}{2}}}{g}$$

$$t_+ \approx 0.56s$$

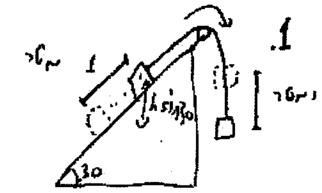
הזמן החיובי הוא הזמן הרלוונטי בבעיה שלנו.

7 [illegible] 1_4106

1)

פתרון תרגיל 5

1.



$h = 1m$

ממקומו מיקום התחלתי.

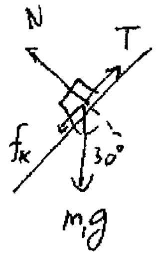
(כנית גובה זה בכיוון הגזרון).

$$\begin{cases} E_{\text{התחלה}} = m_2 g h \\ \quad \parallel \\ E_{\text{סוף}} = m_1 g h \sin 30 + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 \end{cases}$$

(אותה מהירות לשתיהן (אותו חוט)).

$$v = \left[\frac{2}{m_1+m_2}\left(gh\right)\left(m_2 - m_1 \sin 30\right)\right]^{1/2} = \underline{\underline{8.85\ m/s}}$$

שימו לב שאם לא היינו יודעים מהן המסות אז $m_2 - m_1 \sin 30$ יכול להיות שלילי שזה אומר שגוף לא קלוש נזה בכיוון הגזרון אלא נגדו (קביה עצמה כך כדור שגיל נזה בכיוון הגזרון.



ב. (הביטוי לאנרגיה עם החיכוך):

$$E_{\text{סוף}} = E_{\text{התחלה}} + W_{f_k}$$

$$W_{f_k} = -f_k \cdot h = -\mu_k N h = -\mu_k m_1 g \cos 30 \cdot h$$

כלומר:

$$\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = (m_2 - m_1 \sin 30) gh - \mu_k m_1 g \cos 30 h$$

$$\Downarrow$$

$$v = \underline{\underline{8.05\ m/s}}$$

קפיץ וחיכוך

בתנועה מA ל C פועלים כוחות הכובד, הנורמל, והחיכוך. הכובד משמר, הנורמל תמיד ניצב לתנועה ולכן אינו עושה עבודה, ואת עבודת החיכוך אנו יכולים לחשב. כוח החיכוך בקטע המדובר הוא:

$$f = \mu_k N$$

$$N - mg = 0$$

$$f = \mu_k mg$$

$$W = \int f dr = -\mu_k mgd$$

נסמן את גובה 0 במישור , ונשתמש במשפט עבודה אנרגיה:

$$\begin{aligned} K_i + U_i + W &= K_f + U_f \\ mgR - \mu_k mgd &= \frac{mv^2}{2} \\ v^2 &= 2g(R - \mu_k d) \end{aligned}$$

שימו לב שהמהירות בריבוע חייבת להיות חיובית, וזה נותן לנו תנאי לגבי האם בכלל הגוף יגיע לקפיץ.
הקפיץ מתכווץ בS, והשוואת האנרגיה מרגע הפגיעה בקפיץ ועד סיום ההתכווצות נותנת:

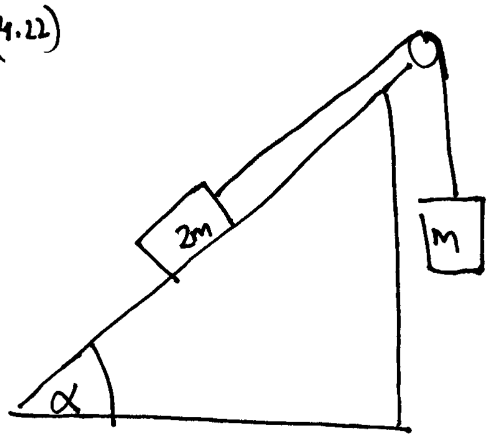
$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{kS^2}{2} \\ 2mg(R - \mu_k d) &= kS^2 \\ k &= \frac{2mg(R - \mu_k d)}{S^2} \end{aligned}$$

מכיוון שהחיכוך בהלוך ובחזור יעשה את אותה עבודה, ניתן פשוט לרשום את משפט העבודה-אנרגיה מתחילת התנועה ועד סופה:

$$\begin{aligned} mgR + W &= mgh \\ mgR - 2 \cdot \mu_k mgd &= mgh \\ h &= R - 2\mu_k d \end{aligned}$$

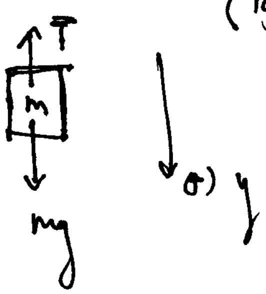
יש לשים לב ש$h > 0$. אם מקבלים גובה קטן מאפס, זה אומר שהגוף בכלל לא יסיים את התנועה, והחיכוך יעצור אותו בדרך.

(4.22)



ex-09-04

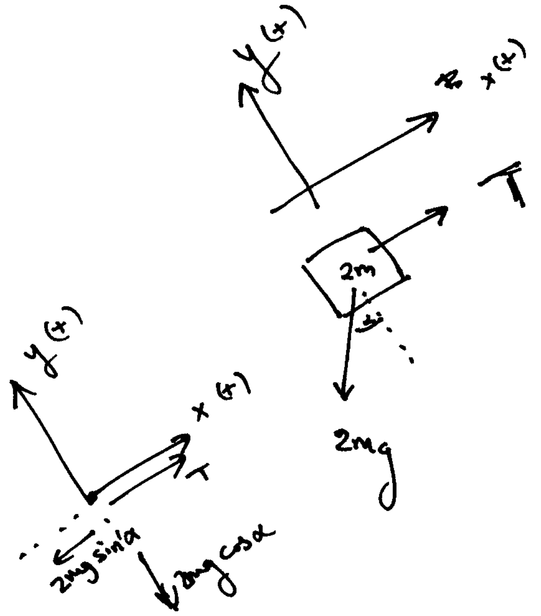
(א)



עבור m:

$$\sum F_y = 0$$

$$mg - T = 0 \Rightarrow \underline{mg = T} \qquad (i)$$



עבור המסה השניה:

$$\sum F_x = 0$$

$$T - 2mg\sin\alpha = 0 \qquad (ii)$$

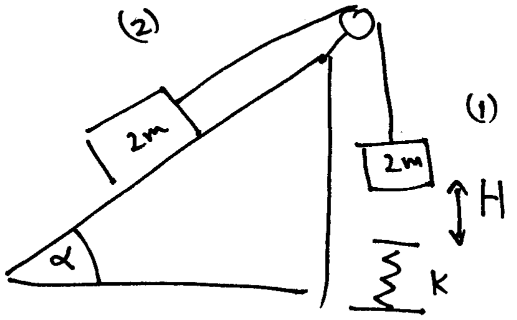
נציב את (i) ב(ii) ונקבל:

$$mg - 2mg\sin\alpha = 0$$

$$1 = 2\sin\alpha$$

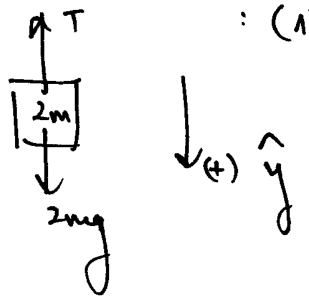
$$\alpha = 30^\circ$$

(ד)



מצאו את α
מסוים זה
$(\alpha=30^\circ)$

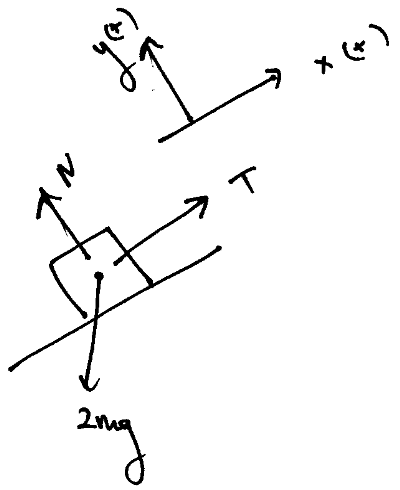
נסרטט על מסה (1):



$$\Sigma F_y = (2m)\cdot a_y$$

$$\text{(i)}\quad 2mg - T = 2m\cdot a$$

נסרטט על מסה (2):



$$\Sigma F_x = (2m)\cdot a$$

$$\text{(ii)}\quad T - 2mg\sin\alpha = 2m\cdot a.$$

נציב α ונקבל:

$$\text{(ii)}\quad T - mg = 2ma$$

נחבר (i) + (ii) ונקבל:

$$\boxed{mg = 4ma} \Rightarrow \boxed{a = g/4}$$

$$V^2 = V_0^2 + 2a \cdot H$$

$$V^2 = 2 \cdot g/4 \cdot H \qquad (V_0 = 0)$$

$$V = \sqrt{gH/2} \quad //$$

$$m_1^* = m_2^* = 2m \; /$$

דרך נוספת - דרך שימור אנרגיה.

שימור האנרגיה הוא שימור אנרגיה של <u>כל</u> המערכת

$$E_i = E_f$$

$$E_{1i} + E_{2i} = E_{1f} + E_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1^* V_{1_0}^2 + m_1^* g h_{1_0} + \frac{1}{2} m_2^* V_{2_0}^2 + m_2 g h_{2_0}$$

$$= \frac{1}{2} m_1^* V_{1_f}^2 + m_1^* g h_{1_f} + \frac{1}{2} m_2^* V_{2_f}^2 + m_2 g h_{2_f}$$

הסימון (1) מתייחס למסה בשיפוע

לעומת הסימון (2) המתייחס למסה (2) התלויה.

$h_{1_0} = h_{2_0} = 0$ [לאור שאלו תיקים] ניתן להניח

כמו כן $V_{1_0} = V_{2_0} = 0$ ולכן:

$i \Rightarrow$ סימן התחלה.

$$0 + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}(2m)V^2 + 2mg(H\sin\alpha) + \frac{1}{2}(2m)V^2 + 2mg(-H)$$

$f \Rightarrow$ final סיום

נציב $\alpha = 30^\circ$ ונקבל:

שימו לב לכל אחד מהמסות
ויש אנרגיה "גובה", ואנרגיה קינטית

$$0 = -mgH + 2mV^2$$

$$V = \sqrt{gH/2} \quad //$$

. $X =$ הסוף

סעיף (3):

$$E_{el_i} + E_{1_i} + E_{2_i} = E_{1_f} + E_{2_f} + E_{el_i}$$

$$0 + (0+0) + (0+0) = \frac{1}{2} m_1^* V_{1_f}^2 + m_1^* g h_{1_f} + \frac{1}{2} m_2^* V_{2_f}^2 + m_2^* g h_{2_f} + \frac{1}{2} k x^2$$

⇐ נתון כי החוט המחבר את הגופים נותר מתוח במשך כל זמן כיווץ הקפיץ

[הנחה זו, לדעתי - לא מציאותית...]

ולכן: $V_{1_f} = V_{2_f} = 0$

$$0 = 0 + (2m) g (H+X) \sin 30^\circ + 0 - 2mg(H+X) + \frac{1}{2} k x^2$$

$$0 = mgH + mgX - 2mgH - 2mgX + \frac{1}{2} k x^2$$

$$0 = +\frac{1}{2} k x^2 - mgX - mgH$$

$$0 = x^2 - \frac{2mg}{k} X - \frac{2mgH}{k}$$

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{4m^2 g^2}{k^2}\right) + \frac{8mgH}{k}}$$

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgH}{k}}$$

פיסיקלית - רק התשובה החיובית נכונה לכן:

$$X = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgH}{k}}$$

//