2. Let $x = x(t)$ and $y = y(x(t))$, then

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y} = y'\dot{x} = y'v_x, \quad y' = \frac{dy}{dx} \tag{43}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \tag{44}$$

$$a_y = \dot{v}_y = y'\ddot{x} + y''\dot{x}^2, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{45}$$

$$|a_n| = \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} \tag{46}$$

$$|\vec{v}| = |\dot{x}|\sqrt{1 + y'^2} \tag{47}$$

$$|a_n| = \frac{|y''|\dot{x}^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{48}$$

$$R = \frac{|\vec{v}|^2}{|a_n|} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

שאלה 1_2227 ־ זריקת תיק

2013

סטודנט להנדסת חשמל הגיע ראשון לכיתה לפני הרצאה חשובה במטרה לתפוס כסא באחת השורות הראשונות. לצערו הוא מגלה שסטודנטים רבים חוסמים את המעבר בדרך החוצה. הוא מחליט לזרוק את התיק שלו מעל הסטודנטים, המרוחקים ממנו מרחק L וגבוהים ממנו בגובה γL, על מנת לפגוע בשורות הראשונות.
חשבו מהי המהירות (גודל v_0 וזוית θ) כך שהתיק כמעט ופוגע בראשי הסטודנטים כשהוא מצוי בשיא הגובה.

פתרון

נבחר את הראשית להיות הנקודה ממנה זורק הסטודנט את התיק. בכיוון האופקי יש לנו תנועה קצובה (מהירות קבועה) ובכיוון האנכי תנועה בתאוצה קבועה:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ x &= x_0 + v_{0x} t = v_0 \cos\theta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= -g \\ v_y &= v_{0y} + a_y t = v_0 \sin\theta - gt \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

התיק כמעט ופוגע בראשי הסטודנטים, כלומר הנקודה $(L, \gamma L)$ מופיעה במסלול, ובנוסף המהירות בכיוון y בדיוק מעל ראשיהם שווה אפס:

$$\begin{aligned} v_y &= 0 = v_0 \sin\theta - gt \\ y &= \gamma L = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x &= L = v_0 \cos\theta t \end{aligned}$$

יש לנו 3 משוואות ו־3 נעלמים v_0, θ ו־t ולכן אנו מסוגלים לפתור את מערכת המשוואות.

$$\begin{aligned} v_0 \sin\theta &= gt \\ t &= \frac{L}{v_0 \cos\theta} \end{aligned}$$

נציב במשוואה של y:

$$\begin{aligned}\gamma L &= gt^2-\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}gt\cdot t=\frac{1}{2}v_0\sin\theta\frac{L}{v_0\cos\theta}=\frac{L}{2}\tan\theta\\ \theta &= \arctan\left(2\gamma\right)\end{aligned}$$

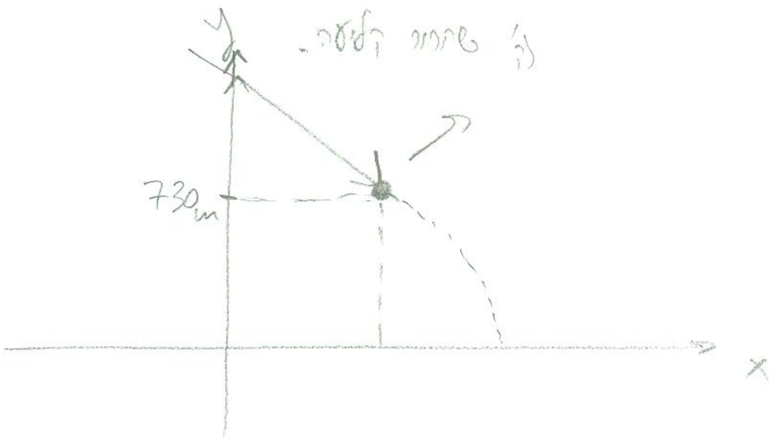
נמצא כעת את גודל המהירות v_0:

$$\begin{aligned}0 &= v_0\sin\theta-\frac{gL}{v_0\cos\theta}\\ 0 &= v_0^2\sin^2\theta-gL\tan\theta\\ v_0^2 &= \frac{gL\tan\theta}{\sin^2\theta}=\frac{gL\tan\theta}{1-\cos^2\theta}\end{aligned}$$

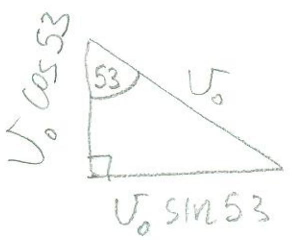
נעזר בזהות הטריגונומטרית:

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

$$\begin{aligned}v_0^2 &= \frac{gL\tan\theta}{1-\frac{1}{1+\tan^2\theta}}=\frac{gL\tan\theta}{\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}=\frac{gL}{\tan\theta}\left(1+\tan^2\theta\right)\\ &= \frac{gL}{2\gamma}\left(1+4\gamma^2\right)=gL\left(\frac{1}{2\gamma}+2\gamma\right)\\ v_0 &= \sqrt{gL\left(\frac{1}{2\gamma}+2\gamma\right)}\end{aligned}$$



א. למטוס מהירות בעלת רכיב v_{0x} (רכיב אופקי) ו-v_{0y} (רכיב אנכי)



$$v_{0x} = v_0 \sin 53$$
$$v_{0y} = v_0 \cos 53$$

המטוס משחרר קליעה בגובה 730m, המהירות ההתחלתית של הקליעה תהיה גם כמו מהירות המטוס, הקליעה פוגעת בקרקע כעבור 5 שניות לכן מה שמעניין אותנו זה ציר y. בציר y יש גם תאוצה שלילית כתוצאה מכוח משיכה לכן:

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$
$$= y_0 - (v_0 \cos 53) t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$0 = 730 - (v_0 \cos 53) \cdot 5 - 5 \cdot (25) \quad , \quad g \approx 10 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$
$$v_0 = \frac{121}{\cos 53} = 201.05 \left[\frac{m}{s}\right]$$

מצאנו את מהירות המטוס.

ב.

$$X = X_0 + V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$a_x = 0 \ , \ V_{0x} = V_0 \sin 53 \ , \ X_0$$

$$X = (V_0 \sin 53) t = 201.05 \cdot \sin 53 \cdot 5 = 802.8 [m]$$

ג.

$$V_y = -V_{0y} - a_y t = -V_0 \cos 53 - g t = -171 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$V_x = V_{0x} = V_0 \sin 53 = 160.56 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$t = 5 [s]$

$V_0 = 201.05 \left[\frac{m}{s}\right]$

סימן - בציר y מעיד כי הקליע נופל למטה וקבענו
את הכיוון בכיוון שלילי.

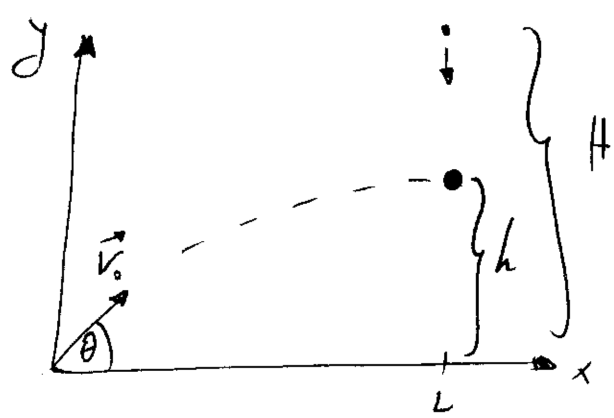
שאלה ממבחן 2005 מועד ג'

גוף נופל בנפילה חופשית ממנוחה מנקודה בגובה H.
ברגע שהגוף מתחיל ליפול נזרק גוף שני מהקרקע.
שני הגופים מתנגשים בגובה h מעל הקרקע.
המרחק האופקי בין הגופים הוא L

1) באיזו זווית מעל האופק נזרק הגוף השני?
2) באיזו מהירות $\vec{V_0}$ נזרק הגוף השני?
3) מהי מהירותו היחסית של הגוף השני ביחס לגוף הראשון ברגע הפגיעה?

פתרון:

* נכתוב את משוואות התנועה עבור 2 הגופים ולאחר מכן נציב את תנאי השאלה: מפגש בגובה h במרחק L



גוף I:
$$y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$$
$$x(t) = L$$

גוף II:
$$y(t) = V_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$x(t) = V_0 \cos\theta \cdot t$$

1)
* נחשב כמה זמן לקח לגוף ה I להגיע לגובה h

$$h = H - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2(h-H)}{g}} = \tilde{t}$$ נסמן ב

* ידוע לנו כי בזמן $\tilde{t}$ גוף II נמצא בגובה h ובמרחק אופקי L ולכן:

(I) $L = V_0 \cos\theta \cdot \tilde{t}$

(II) $h = V_0 \sin\theta \cdot \tilde{t} - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2 \Rightarrow V_0 \sin\theta \cdot \tilde{t} = h + \frac{1}{2}g\tilde{t}^2$

נחלק את II ב I ונקבל:

$$\tan\theta = \frac{h + \frac{1}{2} g \tilde{t}^2}{L}$$

נציב את $\tilde{t}$:

$$\tan\theta = \frac{\cancel{h} + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{g} \cdot \frac{\cancel{2}(H-\cancel{h})}{\cancel{g}}}{L} = \boxed{\frac{H}{L}} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{H}{L}\right)}$$

2) אם למצוא את V_0 נשתמש במשוואה I

I (אפשר להשתמש בזהות $1+\tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$)

II (או למצוא את רכיבי הוקטור V_0 ולאחר מכן
למצוא את V_0 באמצעות פיתגורס)

נשתמש ב II:

$$L = V_0 \cos\theta \cdot \tilde{t} \rightarrow V_0 \cos\theta = \frac{L}{\tilde{t}} =$$

כמו שראינו קודם

$$= \frac{L}{\frac{2(H-h)}{g}} = \boxed{\frac{Lg}{2(H-h)}}$$

כמו כן ניתן להכפיל את
המשוואה ב $\sin\theta$ ולחלק ב $\cos\theta$ ונקבל:

$$V_0 \sin\theta = \frac{L}{\tilde{t}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{L}{\tilde{t}} \tan\theta = \frac{\cancel{L}}{\frac{2(H-h)}{g}} \cdot \frac{H}{\cancel{L}} = \boxed{\frac{Hg}{2(H-h)}}$$

$$|\vec{V}_0| = \sqrt{\left[\frac{Lg}{2(H-h)}\right]^2 + \left[\frac{Hg}{2(H-h)}\right]^2} = \boxed{\frac{g}{2(H-h)} \sqrt{L^2 + H^2}}$$

3) נגדיר מהירות יחסית:

$$V_{1y} = -gt \quad , \quad V_{1x} = 0$$

$$V_{2y} = V_0 \sin\theta - gt \quad , \quad V_{2x} = V_0 \cos\theta$$

$$\vec{V}_{rel} = \left(V_{2x} - V_{1x} \ , \ V_{2y} - V_{1y} \right) =$$

$$= \left(V_0 \cos\theta - 0 \ , \ V_0 \sin\theta - gt - (-gt) \right) =$$

$$\vec{V}_{rel} = \left(V_0 \cos\theta \ , \ V_0 \sin\theta \right)$$

חלקיק בעולם התלת מימדי

הביטוי למיקום הוא :

$$r(\vec{t}) = A\hat{i} + Bt^2\hat{j} + Ct\hat{k}$$

המהירות היא:

$$v(\vec{t}) = \frac{dr(\vec{t})}{dt} = 0 + 2Bt\hat{j} + C\hat{k}$$

התאוצה:

$$a(\vec{t}) = \frac{dv(\vec{t})}{dt} = 0 + 2B\hat{j} + 0$$

המיקום בציר x הוא קבוע. בציר y יש תאוצה קבועה, ובציר z מהירות קבועה. הצורה של מסלול כזה היא פרבולה בצירי y ו z.

2) וקטורים ויחידות

$|A| = 12$ [Newton] $\qquad \alpha = 0$ [rad]

$|B| = 20$ [Newton] $\qquad \beta = \pi$ [rad]

נצייר בהתאמה לזויות את הוקטורים B, A

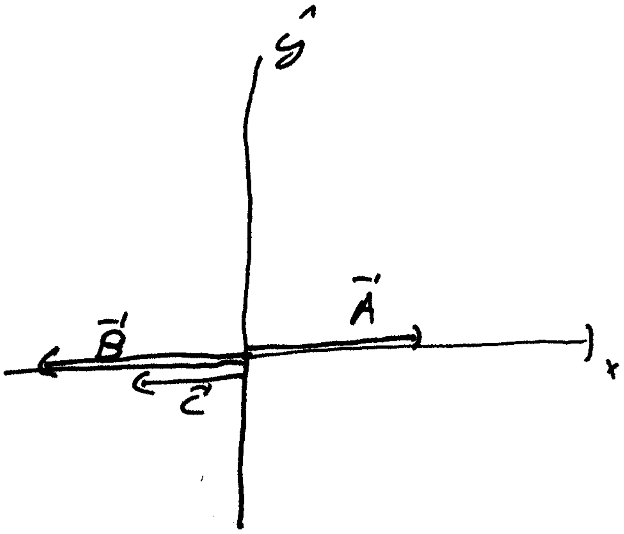
ביחס לציר $\hat{x}$

$A_x = |A| \cos\alpha = 12 [N]$

$A_y = |A| \sin\alpha = 0 [N]$

$B_x = |B| \cos\beta = -20 [N]$

$B_y = |B| \sin\beta = 0 [N]$



$C_x = A_x + B_x = -8 [N]$

$C_y = 0$

$\vec{C} = -8\hat{x}$ [N]

$|C| = \sqrt{8^2 + 0} = 8 [N]$

γ הזוית של הוקטור $\vec{C}$

ביחס לציר $\hat{x}$

$\vec{C}$ הוא באותו כיוון כוקטור $\vec{B}$ לכן $\gamma = \pi$ [rad]

כפי שרואים בציור

ב)

$$[N] = \frac{kg \times meter}{sec^2} = \frac{1000 [gram] \times 100 [cm]}{sec^2}$$

$$= 10^5 \frac{gram \times cm}{sec^2} = 10^5 [Dyne]$$

$|C| = 8 \cdot 10^5$ [Dyne]

קליעה לחישוק

נסמן:

$$v_0 = 10.8\frac{m}{s}$$
$$g = 9.8\frac{m}{s^2}$$
$$h = 4.9m$$
$$u = 9.1\frac{m}{s}$$

נבחר מערכת קואורדינטות, אשר הראשית שלה בנקודת הזריקה, ציר x ימינה, וציר y כלפי מעלה. נרשום במערכת זו את נקודת הזריקה והמהירות ההתחלתית:

$$\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha + u \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

במציאת המהירות ההתחלתית התחשבנו בכך שמהירות הכדור ניתנה לנו ביחס לאדם הזורק, ובנוסף פירקנו את המהירות לרכיבים כמקובל. מרגע העזיבה, התנועה היא בתאוצה קבועה, ולכן:

$$\begin{aligned} \vec{r(t)} &= \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha + u \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ \vec{v(t)} &= \frac{d\vec{r(t)}}{dt} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha + u \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t \end{aligned}$$

ביקשו מאיתנו את המרחק האופקי עד הזריקה, אבל על מנת לקבלו אנחנו נדרשים לחשב את הזווית α ואת הזמן עד הפגיעה בחישוק. הדרישה היא שהחישוק יעבור בגובה מסוים, ובאופן אופקי. הכוונה באופקי היא שהמהירות בציר y היא אפס. נשארנו עם שתי משוואות וקטוריות:

$$\begin{aligned} \vec{r(t_1)} &= \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha + u \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \frac{t_1^2}{2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ h \end{pmatrix} \\ \vec{v(t_1)} &= \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha + u \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha + u \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נציב את $v_0 \sin\alpha$ מהמשוואה של המהירות במשוואה של המיקום לקבלת:

$$gt_1^2 - g\frac{t_1^2}{2} = h$$
$$t_1 = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$\sin\alpha = \frac{gt_1}{v_0} = \sqrt{\frac{2hg}{v_0^2}}$$

$$x_1 = (v_0 \cos\alpha + u)t_1 = u\sqrt{\frac{2h}{g}} + v_0\sqrt{1 - \sin^2\alpha}t_1 = u\sqrt{\frac{2h}{g}} + v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{1 - \frac{2hg}{v_0^2}} \approx 13.64m$$