

תרגול #7 - שימור אנרגיה והספק

30 באפריל 2013

רקע תיאורטי

שימור אנרגיה

אנרגיה של גוף היא סכום האנרגיה הקינטית והאנרגיות הפוטנציאליות $E = K + U$. כאשר הכוחות משמרים (כגון, קפיץ וכבידה) סך האנרגיה הכוללת של הגוף **נשמרת** (נשארת קבועה), גם אם האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית משתנות.

$$\begin{aligned}E_i &= K_i + U_i \\E_f &= K_f + U_f \\K_i + U_i &= K_f + U_f \\ \Delta K &= -\Delta U\end{aligned}$$

ואז, השינוי באנרגיה הקינטית שווה ל**מינוס** השינוי באנרגיות הפוטנציאליות (קפיץ/גובה וכו').

כח לא משמר

כאשר יש כח חיכוך מסוג כלשהו (חיכוך משטח קינטי, כח גרר וכו') - כח זה אינו משמר והוא גורם לאיבוד באנרגיה של הגוף.

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{non-conservative}$$

כח משמר ואנרגיה פוטנציאלית

כח משמר ניתן לתיאור על ידי פונקציה שהיא סקלר (בניגוד לכח שהוא וקטור). הקשר בין השניים הוא:

$$F = -\frac{dU}{dl}$$

כאשר הדיפרנציאל dl הוא פשוט הרכיב שלאורכו הפוטנציאל משתנה (למשל: dx אם מדובר

בקפיץ אופקי, או dy אם מדובר באנרגיה גובה).
ניתן גם לרשום את הקשר ההפוך:

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

שימו לב כי האנרגיה הפוטנציאלית בהגדרה עם סימן מינוס לעומת הגדרת העבודה W , וכן לא ניתן להגדיר אנרגיה פוטנציאלית עבור כח שאינו משמר.

הספק

הספק היא קצב שינוי האנרגיה (בדיוק כמו שמהירות היא קצב שינוי ההעתק, ותאוצה היא קצב שינוי המהירות):

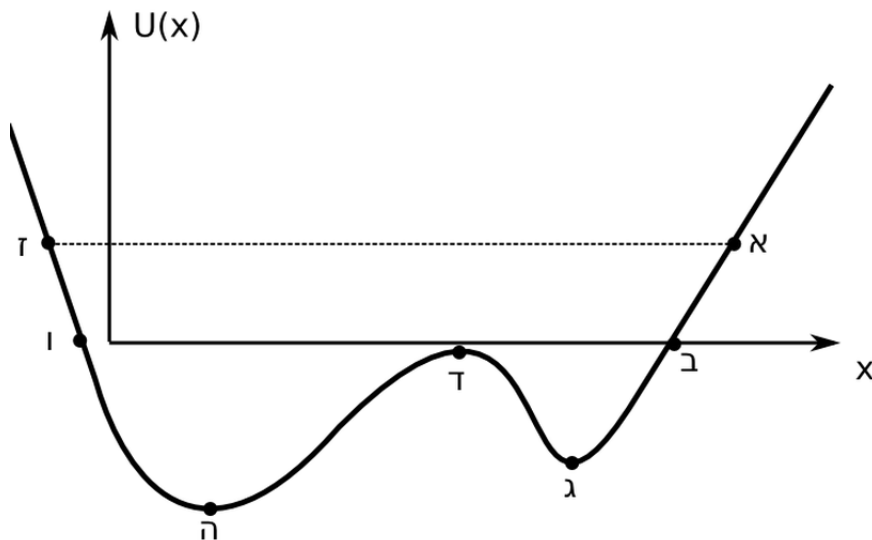
$$P = \frac{dW}{dt}$$

ההספק שווה לאפס כאשר יש שימור אנרגיה. הספק יכול להיות שלילי, אם מדובר בבזבז אנרגיה, כזה שמתרחש למשל כשיש כח חיכוך. הספק יכול להיות גם חיובי, למשל הספק מנוע שמאפשר למכונית ליסוע.
ניתן גם לרשום את ההספק באופן שונה:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

שאלה 1_4224 - גרף עם פוטנציאל

גוף נע בהשפעת הפוטנציאל המתואר בשרטוט:

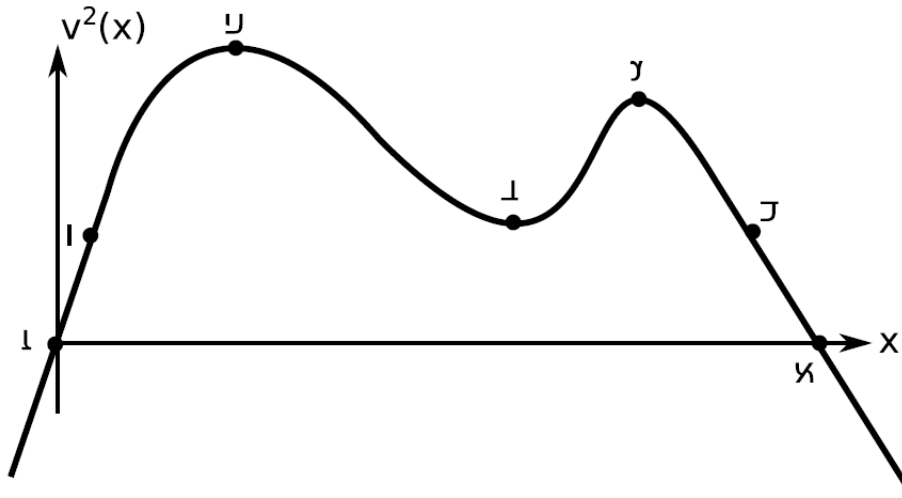


האנרגיה המכנית הכוללת שלו נמצאת בגובה הקו המקווקו.

- א. באילו נקודות מהירות הגוף מתאפסת?
- ב. באילו נקודות מהירות הגוף מקסימלית?
- ג. באילו נקודות הכח על הגוף מתאפס?
- ד. סמנו על הגרף את התחומים בהם הכח פועל ימינה לכיוון הציר החיובי, והתחומים בהם הכח פועל שמאלה לכיוון ציר x השלילי.
- ה. שרטטו גרף סכמטי של מהירות הגוף בריבוע v^2 כפונקציה של x .
- ו. האם הגוף נמצא במסלול קשור (bound) או לא קשור (unbound)?

פתרון

- משימור אנרגיה מכנית $E = K + U$ ולכן האנרגיה הקינטית היא פשוט $K = E - U$. כלומר, ההפרש בין הקו המקווקו לבין גרף הפוטנציאל נותן את גודל האנרגיה הקינטית.
- א. מהירות הגוף מתאפסת כאשר האנרגיה הקינטית מתאפסת, זה קורה כאשר $E = U$. על גבי הגרף הדבר מתרחש ב-2 נקודות: א ו-ז.
- ב. מהירות הגוף מקסימלית כאשר האנרגיה הקינטית מקסימלית. ההפרש המקסימלי בין קו האנרגיה הכוללת לבין גרף הפוטנציאל מתרחש בנקודה ה.
- ג. מהנוסחה $F = -\frac{dU}{dx}$ אנו מקבלים את הכח מהאנרגיה הפוטנציאלית. הכח מתאפס כאשר הנגזרת $\frac{dU}{dx} = 0$ מתאפסת (שיפוע אפס) וזה קורה עבור 3 נקודות: ג, ד ו-ה.
- ד. הכח הוא חיובי כאשר נגזרת הפוטנציאל שלילית, $\frac{dU}{dx} < 0$, כלומר כאשר גרף הפונקציה יורד וההיפך. לכן, הכח פועל ימינה בקטעים: בין ג ל-ד ובין ה ל-ז. הכח פועל שמאלה בקטעים: בין א ל-ג ובין ד ל-ה.
- ה. המהירות בריבוע שווה ל- $v^2 = \frac{2}{m}K$. לכן הגרף יראה בדיוק כמו גרף האנרגיה הקינטית עד כדי מכפלה של קבוע שאינה משנה את צורת הגרף. $K = E - U$ ולכן: $-U$ הוא פשוט הגרף למעלה אחרי שהפכנו אותו סביב ציר x ואז עלינו להוסיף את E שהוא קבוע. הוספת קבוע לגרף אומר שעלינו להזיז את הגרף כולו כלפי מעלה.



1. מצב שאינו קשור אומר שהגוף שנע בפוטנציאל זה יכול "לברוח" לאינסוף או מינוס אינסוף. כדי לנוע לאינסוף, למשל, יהיה עליו לחצות את הקו המקווקו של האנרגיה המכנית ולהימצא באנרגיה פוטנציאלית גדולה מהאנרגיה E . אולם יש שימור אנרגיה בבעיה שלנו, ולכן האנרגיה נשארת קבועה ולכן הוא אינו יכול להגיע לאינסוף או למינוס אינסוף. ניתן להסתכל על זה גם אחרת, כדי להגיע לאינסוף על הגוף להימצא באנרגיה קינטית שלילית - אך אין הדבר אפשרי פיסיקלית כיוון ש- v^2 תמיד חיובי.

שאלה 1_4109 - הספק ומכונית

למכונית הספק מקסימלי של 80 כוחות סוס (80 hp). נתון כי כח החיכוך שהאוויר מפעיל על המכונית הוא מהצורה:

$$f = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

$$D = 0.5$$

$$\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$$

$$A = 2 \text{ m}^2$$

D הוא קבוע הגרר, ρ היא צפיפות האויר ו- A הוא שטח חתך המכונית במאונך לכיוון התנועה.

- א. מהי המהירות המקסימלית של המכונית?
- ב. כמה אנרגיה צריך להשקיע כדי לעבור 100 km במהירות מקסימלית?
- ג. כמה אנרגיה צריך להשקיע כדי לעבור 100 km במהירות של $v = 90 \text{ km/h}$?

פתרון

א. נשתמש בביטוי של ההספק כפונקציה של הכח והמהירות:

$$P = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2} D \rho A v^2 \cdot v = -\frac{1}{2} D \rho A v^3$$
$$|v| = \left(\frac{2P}{D \rho A} \right)^{\frac{1}{3}}$$

קיבלנו את גודל המהירות כפונקציה של ההספק בכל רגע ורגע. עבור הספק מקסימלי נקבל מהירות מקסימלית. נציב את הערכים, אולם עלינו להציבם באותה מערכת של יחידות:

$$1 \text{ hp} = 745 \text{ Watt}$$
$$|v_{max}| = \left(\frac{2 \cdot 80 \cdot 746}{0.5 \cdot 1.3 \cdot 2} \right)^{\frac{1}{3}} = 45 \text{ m/s} = 162 \text{ km/h}$$

ב. האנרגיה שצריך להשקיע כדי לעבור 100 km במהירות מקסימלית v_{max} היא:

$$W_1 = \vec{f} \cdot \vec{\Delta l} = \frac{1}{2} D \rho A v_{max}^2 \cdot \Delta l = 132 \times 10^6 \text{ J}$$

ג. האנרגיה שצריך להשקיע כדי לעבור 100 km במהירות מקסימלית $v_0 = 90 \text{ km/s}$ היא: 25 m/s

$$W_2 = \vec{f} \cdot \vec{\Delta l} = \frac{1}{2} D \rho A v_0^2 \cdot \Delta l = 41 \times 10^6 \text{ J}$$

נשים לב שמהירות גדולה יותר, גם אם לאותו מרחק, צורכת יותר אנרגיה.