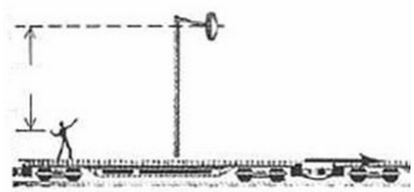
תרגול #2 - תנועה בשני מימדים

18 במרץ 2013

שאלה 2204_1 - קליעה לחישוק

אדם עומד על קרונית הנעה במהירות קבועה של $u = 9.1\,m/s$. הוא מעוניין לזרוק כדור כך שיעבור דרך חישוק הנמצא $h = 4.9\,m$ מעל הנקודה ממנה הכדור עוזב את ידו. בנוסף, הוא מעוניין שהכדור יעבור **אופקית** דרך החישוק. מהירות זריקת הכדור (יחסית לאדם הזורק) היא $v_0 = 10.8\,m/s$.

באיזה מרחק אופקי צריך האדם לשחרר את הכדור?



פתרון

הכדור נזרק מהקרונית (מערכת אשר נעה במהירות u) בזוית כלשהי α. נפרק את התנועה לרכיב אנכי (ציר y) ולרכיב אופקי (ציר x) ונבחן את סוג התנועה בכל רכיב.

ברכיב האופקי אין תאוצה והתנועה היא תנועה קצובה (מהירות קבועה), לעומת זאת ברכיב האנכי יש לנו תאוצת הכוכב כלפי מטה $a = -g = -9.8\,m/s$.

נבחר את הראשית להיות נקודת הזריקה.

מהירות הכדור ברגע הזריקה במערכת הקרונית היא לפיכך:

$$
\begin{aligned}
v_{0x} &= v_0 \cos\alpha \\
v_{0y} &= v_0 \sin\alpha
\end{aligned}
$$

אולם במערכת של הקרקע עלינו להוסיף לרכיב האופקי את מהירות הקרונית:

$$
\begin{aligned}
v_{0x} &= v_0 \cos\alpha + u \\
v_{0y} &= v_0 \sin\alpha
\end{aligned}
$$

נשים לב כי רכיב המהירות בכיוון האנכי לא משתנה והוא זהה הן במערכת הקרונית והן במערכת הקרקע.

משוואת התנועה בכיוון x:

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos\alpha + u)\, t$$

משוואת התנועה בכיוון y:

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y &= v_{0y} + at = v_0 \sin\alpha - gt \end{aligned}$$

כיוון שעל הכדור לעבור את החישוק אופקית, הדבר אומר שברגע המעבר מהירותו האנכית שווה לאפס. נתון זה יכול לשמש אותנו למציאת α בעזרת הנוסחה הבאה:

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{0y}^2 - 2g\,(y - y_0) \\ v_y^2\,(h) = 0 &= (v_0 \sin\alpha)^2 - 2gh \\ \Rightarrow \sin\alpha &= \pm\frac{\sqrt{2gh}}{v_0} \\ \alpha &= 65.15^\circ \end{aligned}$$

מעניין אותנו רק הסימן החיובי (זווית זריקה בין $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

אם נחשב את פרק הזמן שלוקח לכדור לעלות גובה h, אותו פרק זמן יתן לנו גם את הדרך האופקית שהכדור עושה בהגיעו לגובה החישוק, ומכאן נקבל את המרחק שיש לאדם לזרוק אותו.-

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin\alpha - gt \\ t &= \frac{v_0 \sin\alpha - v_y}{g} \\ t_{top} &= \frac{v_0}{g}\sin\alpha = \frac{v_0}{g}\frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{aligned}$$

הצבת t_{top} במשוואת התנועה עבור x יתן את המרחק (זכרו שבחרנו $x_0 = 0$):

$$x_{throw} = (v_0 \cos\alpha + u)\, t_{top} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,(v_0 \cos\alpha + u) = 1{\cdot}(10.8 \times 0.42 + 9.1) = 13.64\, m$$

שאלה 2205_1 - תנועה בליסטית

כדור נזרק מהראשית במהירות v_0 בזווית θ מעל ציר x. צופה מודד את המרחק האופקי שהכדור פגע בקרקע. הצופה מדד מרחק d מהראשית. נתונה תאוצת הכובד g כלפי מטה.

א. מצאו את θ.

ב. מהו θ עבורו d מקסימלי?

ג. כמה פתרונות יש עבור $d < d_{max}$?

ד. מצאו את משוואת המסלול של הכדור $y\left(x\right)$.

פתרון

א. נפרק את התנועה לרכיב אופקי (תנועה קצובה) ורכיב אנכי (תנועה שוות תאוצה):

$$\begin{aligned}\Delta x &= v_{0x}t = v_0\cos\theta\cdot t\\ v_x &= v_0\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= v_{0y}t+\frac{1}{2}at^2 = v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\\ v_y &= v_{0y}+at = v_0\sin\theta-gt\end{aligned}$$

נתון כי הכדור פגע במרחק אופקי d, וההעתק האנכי שהוא עשה הוא לפיכך

$$d = v_0\cos\theta\cdot t_1$$

בפרק זמן זה t_1 העתק הכדור בכיוון האנכי הוא אפס:

$$\Delta y = 0 = v_0\sin\theta\cdot t_1-\frac{1}{2}gt_1^2 = \left(v_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt_1\right)t_1$$

$$t_0 = 0 \qquad t_1 = \frac{2v_0}{g}\sin\theta$$

נציב במשוואה עבור d ונקבל:

$$\begin{aligned}d &= v_0\cos\theta\cdot\frac{2v_0}{g}\sin\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta\\ \Longrightarrow &\qquad \sin 2\theta = \frac{gd}{v_0^2}\end{aligned}$$

ב. ניתן לראות מסעיף קודם שעבור $\sin 2\theta$ מקסימלי מתקבל d מקסימלי וזה מתרחש כאשר $2\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$ או לחילופין $\theta_{max} = \frac{\pi}{4}$.

ג. עבור $d < d_{max}$ אנו נקבל 2 פתרונות. פתרון אחד קטן מ-$\frac{\pi}{4}$ ופתרון שני גדול מ-$\frac{\pi}{4}$.

ד. אם נבחר את הראשית להיות $(x_0, y_0) = (0,0)$ אזי נוכל לבטא את t באמצעות x:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

ולהציבו במשוואה עבור y:

$$y\left(x\right) = v_0 \sin\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = x \tan\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$