רקע תיאורטי פיסיקה 1

30 ביוני 2013

הערה: יתכן וישנן נוסחאות שנלמדו אך אינן מופיעות פה. הרשימות מטה הן ריכוז של התרגולים בקורס ואין לייחס אליהם כאל מקור רפרנס יחיד בקורס (כל הזכויות שמורות לשרית נגר).

קינמטיקה

מיקום כתלות בזמן $x(t)$

מהירות כתלות בזמן $v(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ (כדי לקבל את $x(t)$ מ־$v(t)$ נבצע את הפעולה ההפוכה - אינטגרציה)

תאוצה כתלות בזמן $a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ (כדי לקבל את $v(t)$ מ־$a(t)$ נבצע את הפעולה ההפוכה - אינטגרציה)

תנועה במהירות קבועה (קצובה):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0+v_0t \\ v(t) &= v_0 \end{aligned}$$

תנועה בתאוצה קבועה (שוות תאוצה):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= v_0+at \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0+\frac{1}{2}(v_0+v)t \\ x &= x_0+vt-\frac{1}{2}at^2 \\ v^2 &= v_0^2+2a(x-x_0) \end{aligned}$$

מהירות ממוצעת

המהירות שהיתה לגוף לו היה נע במהירות **קבועה** העתק Δx (ולא דרך) בפרק זמן Δt:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

תאוצה ממוצעת

התאוצה שהיתה לגוף לו היה נע בתאוצה **קבועה** ומשנה את מהירותו Δvבפרק זמן Δt:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

תנועה יחסית

ראינו בתרגול כי מיקום של גוף תלוי בבחירת מערכת הצירים (היכן בחרנו את הראשית).

כאשר אנחנו רוצים לדבר על 2 גופים שונים (או יותר) A ו־B אשר כל אחד מהם מתואר על ידי מיקום x_A ו־ x_B ומהירויות $v_A = \dot{x_A}$ ו־ $v_B = \dot{x_B}$.

נוכל לבחור מערכת צירים "במנוחה" (מערכת מעבדה) כך שנתאר את מיקום 2 הגופים ביחס אליה. $x_{B/A} = x_B - x_A$ הם ביחס למערכת זו.

אולם, נוכל לבחור מערכת צירים אשר נעה במהירות של אחד הגופים.

מיקום גוף B ביחס לגוף A יהיה פשוט החסרה של שניהם באופן הבא:

$$x_{BA} = x_B - x_A$$

נוכל לגזור את המשוואה כדי לקבל את המהירות היחסית:

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

והתאוצה היחסית:

$$a_{B/A} = a_B - a_A$$

לדוגמא (בדיקה): אם $v_A = v_B$ אזי המהירות היחסית ביניהם מתאפסת (נראים במנוחה אחד ביחס לשני) $v_{BA} = 0$ וכן גם התאוצה היחסית ביניהן.

תנועה מעגלית

בתנועה מעגלית נח לבחור ראשית צירים כך שציר אחד הוא בכיוון הרדיאלי $\hat{r}$ (radial) וציר שני מאונך לו ובכיוון משיקי $\hat{t}$ (tangential). תנועה מעגלית מתאפשרת בזכות קיומה של תאוצה בכיוון הרדיאלי a_r. בכיוון המשיקי יתכן ותהיה תאוצה משיקית a_t, אך זו קובעת רק אם גודל המהירות המשיקית תשתנה.

- וקטור המהירות $\vec{v}$ בתנועה מעגלית **תמיד** משתנה, ובמקרה הפרטי בו $a_t = 0$ גודלה נשאר קבוע.
- וקטור המיקום $\vec{r}$ בתנועה מעגלית **תמיד** משתנה וגודלו שווה לרדיוס המעגל R (במידה והמרכז נבחר כראשית הצירים).

תנועה מעגלית קצובה

תנועה מעגלית בה **גודל המהירות** לא משתנה, אלא רק כיוונה.
גודל התאוצה הוא רדיאלי בלבד ($a_t = 0$) וניתן על ידי הנוסחה:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

וכיוונה כלפי מרכז המעגל.

זמן המחזור T הוא הזמן הדרוש על מנת להשלים סיבוב אחד שלם.

תדירות f הוא ההופכי של זמן המחזור והוא מייצג את מס' הסיבובים שהגוף עושה בשניה.

מהירות זויתית ω היא גודל הזווית θ שעבר הגוף בזמן t.

על כן, הקשר בין זמן המחזור T לבין המהירות הזויתית ω ניתן על ידי:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

הדרך שעושה גוף בזמן שהוא נע על פני זווית θ היא קשת שאורכה $R \cdot \theta$, ולכן הקשר בין גודל המהירות המשיקית vלגודל המהירות הזוויתית הוא:

$$v = \frac{R \cdot \theta}{t} = \frac{2\pi R}{T}$$

כיוון שגודל המהירות קבועה לכל משך תנועתה בחרנו לשם נוחות $\theta = 2\pi$ ובהתאם לכך $t = T$.
ומתוך נוסחאות אלו אפשר גם לראות כי מתקיים:

$$\begin{aligned} v &= \omega R \\ \theta &= 2\pi \frac{t}{T} = \omega t \end{aligned}$$

תנועה מעגלית שאינה קצובה

דוגמא לתנועה שאינה קצובה היא תנועת מטוטלת. באופן כללי, תנועה מעגלית אינה חייבת להיות על תנועה על פני מעגל שלם וסגור (בתנועה קצובה היא כן, מדוע?).
במקרה כזה אנחנו מפרידים בין 2 הרכיבים, הרדיאלי והמשיקי.

- כאשר **הרדיאלי** אחראי על שינוי בכיוון מהירות הגוף ומאפשר קיום תנועה מעגלית $a_r = \frac{v^2}{r}$.
- ואילו **המשיקי** אחראי על שינוי גודל המהירות $a_t = \frac{dv}{dt}$.

המהירות הזוויתית משתנה אף היא וניתנת על ידי:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

(שימו לב שביטוי זה עבור תנועה **קצובה** עדיין מתקיים, אם כי הוא קבוע).
בנוסף, תהיה לנו תאוצה זוויתית (בכיוון משיקי) הניתן על ידי:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

(עבור תנועה **קצובה** התאוצה הזוויתית שווה אפס).

כוח נורמלי

כח שמפעיל משטח בתגובה לכח שמופעל עליו.

כוח חיכוך

חיכוך הוא כוח הפועל בין שני גופים הנמצאים במגע ומופעל על ידי גוף אחד הדוחף או מושך את הגוף איתו הוא בא במגע. כח זה תמיד מנוגד בכיוונו לכוח הדחיפה/משיכה (במקרה של חיכוך סטטי) או לכיוון תנועת הגוף (במקרה של חיכוך קינטי).
כח החיכוך **אינו משמר**, כלומר במערכת בה יש חיכוך אין שימור אנרגיה, והעבודה שכוח החיכוך עושה הופכת לחום או לשינוי צורה של המשטח.
מבדילים בין כמה סוגים שונים של חיכוך:

- **חיכוך סטטי** - כוח החיכוך בין שני גופים ש**אינם** בתנועה זה יחסית לזה. כוח זה **משתנה** ככל שמגדילים את כוח הדחיפה או המשיכה ומגיע לערך מקסימלי הניתן על ידי: $f_s \leq f_{s,max} = \mu_s N$
- **חיכוך קינטי** - כוח החיכוך בין גופים בתנועה. כח זה **קבוע** ושווה תמיד ל- $f_k = \mu_k N$.
- **גרר** - כוח החיכוך הפועל על גוף הנמצא בתנועה בתוך **נוזל** או **גז** והוא מתכונתי למהירות $f_d = -\gamma v$.

כוח מדומה

למושג "כוח מדומה" יש משמעות מדוייקת במכניקה הניוטונית. למעשה, הוא תמיד פרופורציונאלי למסה של הגוף עליו הוא פועל. כוח זה נקרא מדומה משום שהחוק השלישי של ניוטון לא חל עליו, כלומר אין לו תגובה. כידוע, על פי החוק השלישי של ניוטון גוף שמפעיל כוח על גוף אחד, הגוף השני מפעיל על הגוף הראשון כוח השווה בעצמתו אך מנוגד בכיוונו (חוק הפעולה והתגובה). הכוחות שאנו מרגישים במכונית נוסעת נוסעת אשר מושכים אותנו אחורה למושב, כאשר הנהג מאיץ (לחץ על דוושת הגז), או כאשר אנו נזרקים מצד לצד כאשר המכונית פונה פניות חדות הם למעשה כוחות מדומים. באופן כללי, השפעות אלו קורות ללא סיבה מלבד היותם **במערכת יחוס שהינה מאיצה**, כלומר מערכת יחוס שאינה אינרציאלית. אם מערכת ייחוס נמצאת בתאוצה קבועה, a, יחסית למערכת אינרציאלית אזי על גוף בעל מסה, m, במערכת המאיצה יופיע כוח ש**מנוגד** לכיוון התאוצה ושווה ל־ma.
במערכת יחוס אינרציאלית, הנמצאת על הכביש, אין שום כוח שמושך את הנוסע אחורה. אולם עבור הנוסע ברכב, שהיא מערכת לא אינרציאלית משום שהיא בתאוצה, ישנו כוח מדומה המושך אותנו אחורה. ננתח תופעת זו משתי נקודות מבט:

א. מנקודת המבט של **מערכת אינרציאלית** (הכביש) הרכב מאיץ. על מנת שהנוסע ישאר בתוך הרכב, כוח חייב לפעול על הנוסע. כוח זה מופעל על ידי המושב, אשר התחיל לנוע קדימה עם הרכב, והוא נלחץ לגוף הנוסע עד אשר הוא מעביר לו את מלוא הכוח בכדי שהנוסע ינוע יחד עם הרכב. על כן, הנוסע מאיץ עקב הכח של המושב.

ב. מנקודת הייחוס שבתוך הרכב המאיץ, כלומר **מערכת לא אינרציאלית**, ישנו כוח מדומה אשר דוחף את הנוסע אחורה, בעוצמה השווה למסת הנוסע כפול תאוצת הרכב. כוח זה דוחף את הנוסע אחורה, עד אשר המושב 'נדחס' ומשמש כוח שווה ומנוגד בעוצמתו. על כן, הנוסע הוא נייח במערכת ייחוס זו, משום שהכח המדומה והכוח האמיתי, שמפעיל המושב, מתאזנים.

כוח צנטריפוגלי: כאשר אנו נוסעים במכונית הפונה שמאלה, נרגיש משיכה בכיוון ימין. ביחס למערכת הרכב פועל על הנוסע כוח מדומה הנקרא כוח צנטריפוגלי. בפיסיקה, הכוח הצנטריפוגלי המדומה מושך כל גוף שנמצא בתנועה מעגלית לאורך רדיוס הסיבוב בכיוון שפונה החוצה ממרכז המעגל.

הערה חשובה: בכדי שגוף יוכל לנוע בתנועה מעגלית חייב להיות כוח שמושך את הגוף כלפי מרכז הסיבוב. הכוח הזה הוא **הכוח הצנטריפטלי** והא כוח ממשי ולא מדומה. כידוע, תנועה מעגלית ובכלל זה כל תנועה שאינה קצובה על קו ישר היא לא תנועה במהירות קבועה ועל כן הגוף נמצא בתאוצה. אנו יודעים שהגוף ישאף למעשה להתמיד בתנועה ישרה בכיוון המשיק למעגל הסיבוב, ולכן הגוף "נמשך" כלפי חוץ מעגל הסיבוב. משיכה זו שאנו חשים היא למעשה הכוח הצנטריפוגלי המדומה.

כח משתנה כפונקציה של הזמן

F הוא פשוט פונקציה של הזמן, למשל: $\vec{F} = F_0 \vec{\cos}(\omega t)$ הוא די נפוץ כאשר ω היא התדירות.

כח המשתנה כפונקציה של המהירות

F פרופורציוני למהירות בצורה כלשהי (ליניארי, ריבועי...). למשל: $\vec{F}_{drag} = -\gamma \vec{v}$ (גרר, התנגדות אוויר\גז או נוזל).

כאשר כח זה הוא הכוח היחיד הפועל על הגוף, נרשום את משוואת הכוחות:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma\vec{v}$$

אם התנועה היא במימד אחד (אחרת יש לפרק לרכיבים):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{\gamma}{m}v \\ \frac{dv}{v} &= -\frac{\gamma}{m}dt \\ \ln v - \ln v_0 &= \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{\gamma}{m}\left(t-t_0\right) \\ v &= v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \end{aligned}$$

פתרנו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, ולכן עלינו להציב תנאי התחלה אחד כדי לקבל פתרון יחיד. נשים לב כי המהירות קטנה באופן אקספוננציאלי. במקרים יותר מורכבים בו על הגוף פועל עוד כוחות מלבד כח גרר, יש להוסיף אותם למשוואת הכוחות ולפתור בהתאם.

כח המשתנה כפונקציה של המיקום

F פרופורציוני למיקום. למשל: קפיץ $\vec{F}_{sp} = -k\vec{\Delta x} = -k\left(\vec{x}-\vec{x_0}\right)$
כאשר כח זה הוא הכוח היחיד הפועל על הגוף, נרשום את משוואת הכוחות:

$$\begin{aligned} ma &= m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x-x_0\right) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}\left(x-x_0\right) \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני לא הומוגנית בגלל הקבוע $\frac{k}{m}x$. הפתרון הכללי יהיה הפתרון ההומוגני + הפתרון הפרטי. אנו נעשה זאת בדרך טיפה שונה. נגדיר משתנה חדש $\tilde{x} = x - x_0$. אם נגזור את המשתנה החדש לפי x נקבל: $\frac{d\tilde{x}}{dx} = 1 \;\Rightarrow d\tilde{x} = dx \;\Rightarrow$ $d^2\tilde{x} = d^2x$, ואז משוואת הכוחות תראה=:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\tilde{x} = -\omega^2\tilde{x}$$

קיבלנו משוואה הומוגנית אשר אנו יודעים את הפתרון שלה, פתרון הרמוני: $\tilde{x}\left(t\right) = A\cos\left(\omega t+\phi\right)$. כעת נציב חזרה את המשתנה הקודם שלנו x כיוון שהוא זה שמעניין אותנו:

$$x\left(t\right) = x_0 + A\cos\left(\omega t+\phi\right)$$

אנו פתרנו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני ולכן יש לנו 2 קבועים A שהוא המשרעת (הגודל

המקסימלי שבו הגוף מכווץ/מותח את הקפיץ) ו־ϕשהיא הפאזה. לכן אנו זקוקים ל־2 תנאי התחלה (מיקום + מהירות) כדי לקבל פתרון יחיד. x_0 הוא פשוט המיקום של נקודת שיווי המשקל ביחס לראשית.

ω היא **תדירות** התנועה ההרמונית של הקפיץ. במקרה הפשוט שלנו (רק קפיץ) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, אולם במקרים יותר מורכבים היא יכולה לקבל ביטוי שונה. מזהים את התדירות **לפי המקדם** שמופיע לפני $\tilde{x}$ במשוואה הדיפרנציאלית לעיל.

עבודה

עבודה מכנית המוגדרת בצורה הכללית ביותר באופן הבא:

$$W = \int_{\vec{l_i}}^{\vec{l_f}} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

היא כמות האנרגיה שמושקעת בגוף בעקבות כח $\vec{F}$ הפועל עליו, כאשר הגוף מבצע העתק (דרך) כלשהי. $\vec{dl}$ הוא אלמנט מסלול בכיוון התנועה. $\vec{l_i}$ ו־ $\vec{l_f}$ הם וקטורי המיקום ההתחלתי והסופי בהתאמה.
בתוך האינטגרל אנו מבצעים **מכפלה סקלרית** $\vec{F} \cdot \vec{dl} = \left|\vec{F}\right| \left|\vec{dl}\right| \cos\theta$, כאשר θ היא הזוית הקטנה בין שני הוקטורים.
כאשר מדובר בכח **קבוע**, כלומר, כח שאינו תלוי בהעתק, אז מקבלים ביטוי יותר פשוט ונח לשימוש:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta l} = \left|\vec{F}\right| \left|\vec{\Delta l}\right| \cos\theta$$

אנרגיה

ישנו קשר בין עבודה לאנרגיה. יחידת האנרגיה/עבודה היא $[E] = [W] = N \cdot m = J$ ונקראית $Joule$. לגוף כלשהו יש אנרגיה, אנרגיה זו יכולה להיות מסוגים שונים. דוגמאות לאנרגיות שונות:

אנרגיה קינטית ־ אם לגוף יש מסה m ומהירות v, אזי תהיה לו אנרגיה קינטית שמחושבת על פי: $E_k = K = \frac{1}{2}mv^2$

אנרגיה פוטנציאלית ־ אנרגיה המשויכת למערכת אשר יכולה "לאגור" אנרגיה במצב מסויים (גוף בגובה h או קפיץ מכווץ באורך x) וברגע שחרור אנרגיה זו תומר לאנרגיה קינטית. למשל:

אנרגיה פוטנציאלית כובדית/גובה ־ כאשר אנו מרימים או מורידים חפץ לגובה מסויים כח המשיכה מבצע עבודה (חיובית או שלילית) וזו מתווספת/מוחסרת לגוף בצורה של אנרגיה: $U_g = -\int (\text{-}mg)\, dy = mgy$

אנרגיה פונטציאלית של קפיץ ־ כאשר מותחים או מכווצים גוף המחובר לקפיץ, כח הקפיץ מבצע עבודה (שוב, חיובית או שלילית) וזו מתווספת/מוחסרת לגוף בצורה של אנרגיה: $U_{sp} = -\int kx\, dx = \frac{1}{2}kx^2$

שימור אנרגיה

אנרגיה של גוף היא סכום האנרגיה הקינטית והאנרגיות הפוטנציאליות $E = K + U$.
כאשר הכוחות משמרים (כגון, קפיץ וכבידה) סך האנרגיה הכוללת של הגוף **נשמרת** (נשארת קבועה), גם אם האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית משתנות.

$$\begin{aligned} E_i &= K_i + U_i \\ E_f &= K_f + U_f \\ K_i + U_i &= K_f + U_f \\ \Delta K &= -\Delta U \end{aligned}$$

ואז, השינוי באנרגיה הקינטית שווה ל**מינוס** השינוי באנרגיות הפוטנציאליות (קפיץ/גובה וכו').

כח לא משמר

כאשר יש כח חיכוך מסוג כלשהו (חיכוך משטח קינטי, כח גרר וכו') – כח זה אינו משמר והוא גורם לאיבוד באנרגיה של הגוף.

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{non-conservative}$$

משפט עבודה־אנרגיה

ישנו קשר בין העבודה המכנית שנעשית על/ע"י הגוף לבין השינוי באנרגיה הקינטית שלו:

$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

שימור אנרגיה

אנרגיה של גוף היא סכום האנרגיה הקינטית והאנרגיות הפוטנציאליות $E = K + U$.
כאשר הכוחות משמרים (כגון, קפיץ וכבידה) סך האנרגיה הכוללת של הגוף **נשמרת** (נשארת קבועה), גם אם האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית משתנות.

$$\begin{aligned} E_i &= K_i + U_i \\ E_f &= K_f + U_f \\ K_i + U_i &= K_f + U_f \\ \Delta K &= -\Delta U \end{aligned}$$

ואז, השינוי באנרגיה הקינטית שווה ל**מינוס** השינוי באנרגיות הפוטנציאליות (קפיץ/גובה וכו').

כח לא משמר

כאשר יש כח חיכוך מסוג כלשהו (חיכוך משטח קינטי, כח גרר וכו') ־ כח זה אינו משמר והוא גורם לאיבוד באנרגיה של הגוף.

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{non-conservative}$$

כח משמר ואנרגיה פונטנציאלית

כח משמר ניתן לתיאור על ידי פונקציה שהיא סקלר (בניגוד לכח שהוא וקטור). הקשר בין השניים הוא:

$$F = -\frac{dU}{dl}$$

כאשר הדיפרנציאל dl הוא פשוט הרכיב שלאורכו הפוטנציאל משתנה (למשל: dx אם מדובר בקפיץ אופקי, או dy אם מדובר באנרגית גובה).
ניתן גם לרשום את הקשר ההפוך:

$$U = -\int \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

שימו לב כי האנרגיה הפוטנציאלית בהגדרה עם סימן מינוס לעומת הגדרת העבודה W, וכן לא ניתן להגדיר אנרגיה פוטנציאלית עבור כח **שאינו משמר**.

הספק

הספק היא קצב שינוי האנרגיה (בדיוק כמו שמהירות היא קצב שינוי ההעתק, ותאוצה היא קצב שינוי המהירות):

$$P = \frac{dW}{dt}$$

ההספק שווה לאפס כאשר יש שימור אנרגיה. הספק יכול להיות שלילי, אם מדובר בבזבוז אנרגיה, כזה שמתרחש למשל כשיש כח חיכוך. הספק יכול להיות גם חיובי, למשל הספק מנוע שמאפשר למכונית ליסוע.
ניתן גם לרשום את ההספק באופן שונה:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

מרכז מסה

עד כה הסתכלנו על גוף כאילו היה נקודתי. אולם לעיתים נרצה לבחון גם על מערכת המכילה n גופים שכל אחד מהם יש מסה m_i ומיקום $\vec{r_i}$. ניתן לבחון מערכת זו כאילו היתה "גוף אחד" ולתאר אותה באמצעות משוואת תנועה יחידה (במקום n משוואות תנועה). זאת אנו עושים כאשר אנו מגדירים **מרכז מסה** של המערכת, אשר קרוי גם **מרכז כובד**. זוהי נקודה במרחב שמסת המערכת כולה מתנהגת כאילו היא מרוכזת בה.

לדוגמא: עבור שתי מסות m_1 ו־m_2 שנמצאות במיקום $\vec{r_1}$ ו־$\vec{r_2}$ בהתאמה, מיקום מרכז המסה הוא:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

מרכז המסה של שתי מסות נמצא **תמיד** על הקו הישר המחבר ביניהן.
עבור מס' רב יותר של מסות, נוסחת מיקום מרכז המסה היא:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

כאשר $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ היא המסה הכוללת של המערכת.

אם על המערכת **כולה** שקול הכוחות הוא אפס, אזי מיקום מרכז המסה $\vec{R}_{CM}$ ימשיך בתנועתו באותה מהירות ובקו ישר (חוק I של ניוטון ־ חוק ההתמדה).

מגדירים גם מושג של **מהירות מרכז המסה**, והיא מתקבלת על ידי גזירת **מיקום מרכז המסה** לפי הזמן:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{M}$$

באותו אופן, תאוצת מרכז המסה:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}_{CM}}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \vec{F} = \frac{\vec{F}_{total}}{M}$$

תנועת מרכז המסה היא כאילו המערכת היא גוף אחד במסה M, ופועל עליה כח F_{total} שהוא שקול הכוחות.

מרכז מסה של גוף עם התפלגות רציפה

מרכז המסה אינו מושג הקשור **רק** למערכות עם מספר גופים. זהו מושג הרלוונטי גם לגוף יחיד אשר לו התפלגות מסה (צפיפות מסה) שאינה אחידה ו/או צורה שאינה סימטרית. עד

כה כשעסקנו בגוף עגול כמו דיסקה או כדור או בתיבה מלבנית הגופים היו אחידים בצפיפות המסה שלהם ולכן מרכז המסה שלהם היה פשוט מרכז הכדור/דיסקה/תיבה.
כאשר הדבר אינו כך, כלומר, התפלגות מסה לא אחידה (כגון כדור עם חור שאינו במרכז) או צורה שמרכז הכובד שלה אינו במרכז (כגון חרוט) יש להשתמש בנוסחת מרכז המסה בצורתה האינטגרלית:

$$\vec{R}_{CM}=\frac{1}{M}\int\vec{r}dm=\frac{1}{M}\int\rho\left(\vec{r}\right)\vec{r}\,dV$$

dm הוא אלמנט קטן של מסה אשר שווה ל- $dm=\rho\left(\vec{r}\right)dV$, כאשר $\rho\left(\vec{r}\right)$ היא צפיפות המסה בנקודה $\vec{r}$ ו־dV הוא אלמנט נפח קטן.

תנע (קווי)

תנע הוא גודל פיזיקלי וקטורי והוא מבטא את כיוון ועוצמת התנועה של אותו גוף או קבוצת גופים במרחב. הוא מוגדר באופן הבא:

$$\vec{p}=m\vec{v}$$

ולמעשה, חוק II של ניוטון נוסח במקור באופן הבא (מדוייק יותר):

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

חוק שימור התנע

במערכת סגורה, מערכת אשר לא פועלים עליה **כוחות חיצוניים**) התנע הכולל נשמר:

$$\vec{P}_{total}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i=M\vec{V}_{CM}=Constant$$

למשל, כאשר יש התנגשות גופים ושקול הכוחות על הגופים (המערכת כולה) הוא אפס, מתקיים שימור תנע. כלומר, התנע הכולל הסופי שווה לתנע הכולל ההתחלתי:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2$$

כאשר $\vec{v}_i$ הוא התנע ההתחלתי של גוף i ו- $\vec{u}_i$ הוא התנע הסופי שלו.

מומנט אינרציה I

- עבור גוף יחיד ונקודתי המבצע סיבוב, האנרגיה הקינטית ניתנת על ידי: $K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

כאשר מדובר על מספר גופים הנעים סביב ציר משותף באותה מהירות זויתית ω, האנרגיה הקינטית פשוט תהיה הסכום:=

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_{i}^{n} m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

I הוא מומנט האינרציה ועבור מספר גופים הוא מוגדר כ: $I = \sum_i^n m_i r_i^2$, כאשר r_i הוא מרחק הגוף i מציר הסיבוב.
כאשר מדובר בהתפלגות רציפה (כגון: מוט, דיסקה, מלבן או כל צורה שהיא), מומנט ההתמד מוגדר כך:

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \int r^2 \rho dV \\ &= \int r^2 \sigma ds \\ &= \int r^2 \lambda dl \end{aligned}$$

- dm - אלמנט מסה
- ρ- צפיפות מסה נפחית
- σ- צפיפות מסה משטחית
- λ- צפיפות מסה אורכית

מומנט כח τ

נקרא גם מומנט סיבוב והוא למעשה יכולתו של כח לגרום לסיבובו של גוף עליו הוא פועל. יכולת זו תלויה בגודל הכח, כיוונו וגם במיקומה של נקודת האחיזה של הכח. מומנט הסיבוב הוא מכפלה וקטורית בין הכח הפועל ובין זרוע.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\theta$$

- $\vec{F}$ - וקטור הכח הפועל בנקודה כלשהי על הזרוע
- $\vec{r}$ - וקטור המרחק בין ציר הסיבוב של הגוף לבין נקודת הפעלת הכח
- θ - הזוית בין הכח לבין הזרוע

למעשה, מכיוון שזו מכפלה וקטורית, רק רכיב הכח אשר מאונך לזרוע תורם לתנועה סיבובית.

שיווי משקל מכני

על מנת שגוף יהיה בשיווי משקל מכני צריך להתקיים ששקול הכוחות בכל נקודה עליו יהא שווה לאפס:

$$\sum \vec{F} = 0$$

אולם כעת, בנוסף, צריך להתקיים ששקול המומנטים בכל נקודה על הגוף אף הוא יהא שווה לאפס:

$$\sum \vec{\tau} = 0$$

מומנט כח ותאוצה מעגלית

באנלוגיה למשפט השני של ניוטון:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

אנו מקבלים עבור שקול מומנטי הכח הפועלים על גוף את הקשר הבא:

$$\sum \tau = I\alpha$$

נשים לב שגם כאן מומנט האינרציה (התמד) I בתנועה סיבובית אנלוגי לתפקיד המסה בתנועה קווית, בדיוק כפי שהיה עבור האנרגיה הקינטית:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

משפט עבודה־אנרגיה בתנועה מעגלית

$$\begin{aligned}
W &= \int \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int F_{\perp} r d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \\
&= \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\alpha d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\alpha \frac{d\theta}{dt} dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\alpha\omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\frac{d\omega}{dt}\omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\omega d\omega \\
W &= \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \Delta K
\end{aligned}$$

משפט ציר מקביל

מומנט האינרציה סביב ציר כלשהו אשר מקביל ומצוי במרחק L מציר הסיבוב העובר דרך מרכז המסה של הגוף הוא:

$$I = I_{CM} + ML^2$$

כאשר:

- I_{CM} - מומנט האינרציה סביב ציר העובר דרך מרכז המסה
- M - מסת הגוף
- L - מרחק ציר הסיבוב ביחס למרכז המסה

תאוצה ומהירות זוויתית

ישנו קשר בין תאוצה a ומהירות משיקית v לתאוצה זוויתית α ומהירות זוויתית ω בתנועה סיבובית, בהתאמה.

$$\begin{aligned} l &= \theta r \\ v &= \omega r \\ a &= \alpha r \end{aligned}$$

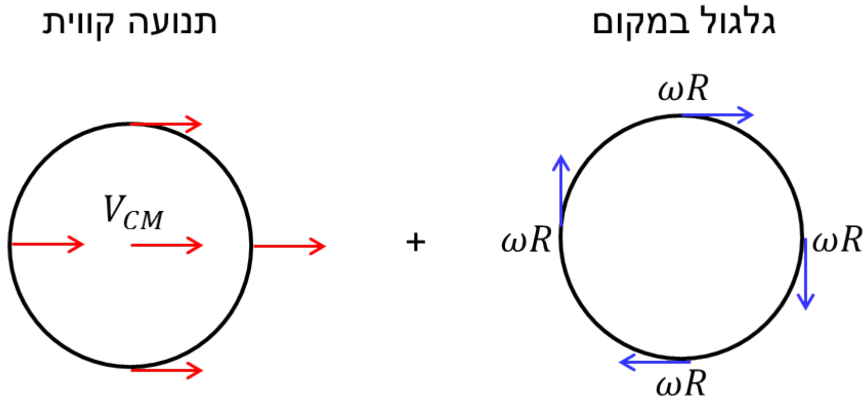
l הוא העתק על גבי מסלול מעגלי, קשת (חלק ממעגל) והוא פרופוציוני לזווית θ שעשה הגוף במהלך תנועתו.
המשוואות הללו תמיד נכונות. במקרה הפרטי של תנועה שוות תאוצה:

$$\begin{aligned} l &= l_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v &= v_0 + at \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega &= \omega_0 + \alpha t \end{aligned}$$

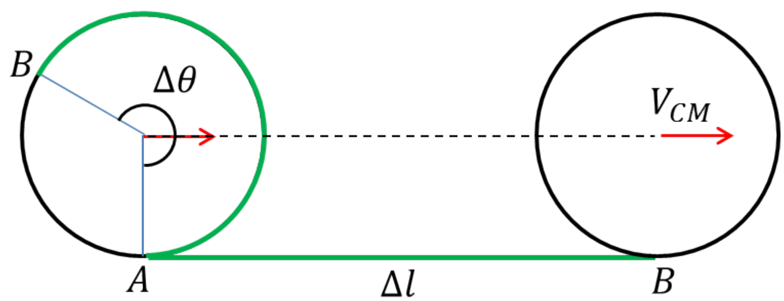
גלגול סביב ציר העובר דרך מרכז המסה

נפרק את התנועה לשני חלקים:

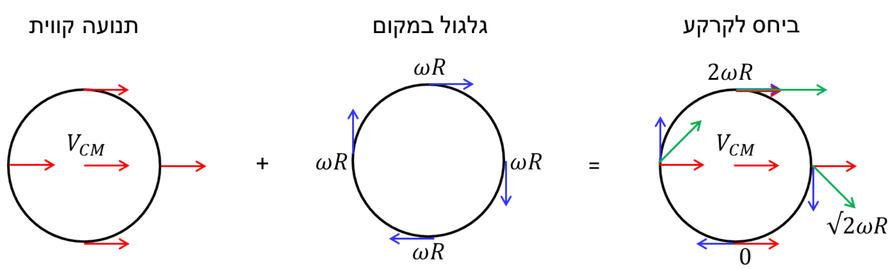


א. גלגול **ביחס** למרכז המסה (מרכז המסה נמצא במנוחה - גלגול במקום).
כל הנקודות על המעגל נעות באותה מהירות זוויתי ω. הנקודות על גבי שפת המעגל, אשר נמצאות במרחק R ממרכז המסה בעלות מהירות $v = \omega R$ בכיוון הסיבוב המשיק למעגל.

ב. תנועה קווית של מרכז המסה V_{CM}.
כיוון שמדובר בגלגול ללא החלקה, יש קשר בין גלגול בזווית $\Delta\theta$ לבין המרחק הקווי Δl שמרכז המסה R_{CM} עושה. **למעשה**, זהו המרחק הקווי **שכל** נקודה על גבי הגלגל עושה (במרחק R מהמרכז).



כדי לקבל את המהירות של כל הנקודות על גבי הגלגל **ביחס לקרקע**, עלינו לחבר וקטורית את המהירויות משני סוגי התנועה:



גלגול סביב ציר העובר דרך נקודת המגע בין הגלגל למשטח

לעיתים, נרצה לפתור את הבעיה ביחס לציר סיבוב אחר אשר לא עובר דרך מרכז המסה. נוכל לבחור את נקודת המגע בין הגלגל למשטח. מדוע שנבחר דווקא אותה? נקודה זו היא בעלת מהירות **אפס** ביחס למשטח. כיוון שכך, ציר הסיבוב במרווח זמן קטן Δt במנוחה ולכן כל שנותר לנו היא תנועה סיבובית סביב ציר סיבוב במרחק R ממרכז המסה. מומנט ההתמד של ציר זה הוא, לפי משפט שטיינר:

$$I = I_{CM} + MR^2$$

מתי נרצה לבחור את ציר הסיבוב כך? בהתאם לנתוני הבעיה ומה שמבקשים מאיתנו לפתור.

תנע זוויתי

התנע הזוויתי הוא למעשה מדד לסיבוביות של גוף מסתובב

$$\begin{aligned} \vec{l} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ |\vec{l}| &= rp\sin\alpha \end{aligned}$$

לא לשכוח - גם כאן $\vec{r}$ משמעותו מרחק הזרוע מציר הסיבוב (ולא מנקודת מרכז המסה).

חוק השני של ניוטון

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \end{aligned}$$

כיוון ש-$\vec{v}||\vec{v}$ ולכן המכפלה הוקטורית $\vec{v} \times \vec{v} = 0$. עבור מספר גופים במערכת: $\vec{L} = \sum_i \vec{l_i}$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\ \vec{\tau} &= I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) \\ \vec{L} &= I\vec{\omega} \end{aligned}$$

חוק שימור תנע זוויתי

כאשר שקול מומנט הכח החיצוני שווה אפס, יש שימור תנע זוויתי:

$$\begin{aligned} \sum \vec{\tau} &= 0 \\ \vec{L} &= const \end{aligned}$$

מתנד פשוט

כאשר יש לנו כח מחזיר, כח אשר רוצה "להחזיר" אותנו לנק' **שיווי משקל**. מתמטית מדובר בכח שפרופורציוני למינוס ההעתק, לדוגמא:

- קפיץ $-k\left(x-x_0\right)$
- מטוטלת (תנודה בזוויות קטנות) $-mg\sin\theta\simeq-mg\theta$

משוואת הכוחות תוביל אותנו לצורה הבאה:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0$$

כאשר ω_0 היא התדירות (הקרויה גם התדירות העצמית) והיא שורש המקדם לפני ההעתק.

- עבור קפיץ $\omega_0^2=\frac{k}{m}$
- עבור מטוטלת $\omega_0^2=\frac{g}{l}$

פתרון משוואה זו $x\left(t\right)$ היא הפונקציה ההרמונית:

$$x\left(t\right)=A\cos\left(\omega_0t+\phi\right)$$

A ו־ϕ הם קבועים ויש למצוא אותם אותם בעזרת שני תנאי התחלה $x\left(t=0\right)$ ו־$v\left(t=0\right)=\dot{x}\left(t=0\right)$. (**הערה:** לא מחייב שהתנאים יהיו בזמן $t=0$ למרות שלרוב זה יהיה כך. אם יש תנאי בזמן אחר $t\neq0$ יש להציב ערך זה של t במשוואות).

מתנד מרוסן

בתוספת לכח המחזיר ישנו גם כח גרר (כח חיכוך כלשהו). מתמטית מדובר בכח הפרופורציוני למינוס המהירות $\vec{F}=-b\vec{v}=-b\dot{\vec{x}}$. משוואת הכוחות תוביל אותנו לצורה הבאה:

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

כאשר $\gamma=\frac{b}{m}$. פתרון המשוואה $x\left(t\right)$ הוא:

$$x\left(t\right)=Ae^{-t/\tau}\cos\left(\omega t+\phi\right)$$

זו פונקציה הרמונית שהאמפליטודה (משרעת) שלה הולכת וקטנה עם הזמן אקספוננציאלית עם **קבוע דעיכה** τ ובעלת תדירות ω השונה מהתדירות העצמית ω_0 של המתנד ללא הריסון.

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{2}{\gamma}\\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{\tau^2}}\end{aligned}$$

ישנם שני מצבים:

- **ריסון חלש** $\frac{1}{\tau} > \omega_0$ ־ במקרה זה כח החיכוך יחסית קטן והאמפליטודה תקטן לאט יחסית בזמן
- **ריסון חזק** $\frac{1}{\tau} < \omega_0$ ־ במקרה זה כח החיכוך יחסית חזק והמתנד לא יעשה תנודות כי האמפליטודה תקטן משמעותית בטרם יעבור מחזור שלם.
- **ריסון קריטי** $\frac{1}{\tau} = \omega_0$ ־ ערך המפריד בין שני המצבים לעיל.

ריסון חזק

עבור מקרה זה התדירות $\omega = i\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$ הוא מספר מרוכב ואז הפתרון הופך:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t/\tau}\left(A_1 e^{-\Omega t} + A_2 e^{+\Omega t}\right) \\ &= A_1 e^{-\left(\frac{1}{\tau}+\Omega\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{1}{\tau}-\Omega\right)t} \\ &= A_1 e^{-\Omega_1 t} + A_2 e^{-\Omega_2 t} \end{aligned}$$

כאשר $\Omega = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$.

ריסון קריטי

קיים רק במקרה שבו התדירות העצמית ω_0 שווה להופכי של קבוע הדעיכה τ. זהו ערך יחיד אשר נותן פתרון:

$$x(t) = Ae^{-t/\tau}$$

מתנד מאולץ

בתוספת לכח המחזיר ישנו כח מאלץ מהצורה $F = F_0\cos(\omega_F t + \phi_F)$ כאשר ω_F, ϕ_F נתונים ואין צורך למצוא אותם. אם יש בבעיה גם כח גרר אז משוואת הכוחות תוביל למשוואה:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_F t + \phi_F)$$

אם **אין** כח גרר אז לא נקבל תלות ב־$\dot{x}$ ולמעשה זה כמו להציב $\gamma = 0$. פתרון המשוואה הכללית **לאחר הרבה מאוד זמן** הוא מהצורה

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_F^2 - \omega_0^2\right)^2 + m^2\gamma^2\omega_F^2}}\cos(\omega_F t + \phi_F)$$

לאחר הרבה זמן (מה שקרוי מצב עמיד) אנו מקבלים ש־$x(t)$ עושה תנודות באותה תדירות כמו הכח המאלץ. כיוון שאנחנו לא "מתעסקים" עם הפתרון בזמנים התחלתיים לפני שהוא מגיע למצב עמיד, אין צורך להשתמש בתנאי התחלה.

רזוננס (תהודה)

כאשר תדירות המאלץ שווה לתדירות העצמית של המערכת $\omega_F = \omega_0$ מקבלים מצב תהודה, מצב בו התנודות חזקות ביותר ומגיעות לערך מירבי. בחיי היום יום משתמשים בתכונה זו כמו למשל במיקרוגל לשם חימום אוכל או ברדיו לשם מציאת תחנות בתדרים מסויימים.
אולם לעיתים תכונה זו אינה רצויה (כמו בתכנון אולמות קונצרטים) ואף מסוכנת כמו במקרה של גשר מצר טקומה בוושינגטון ארה"ב.