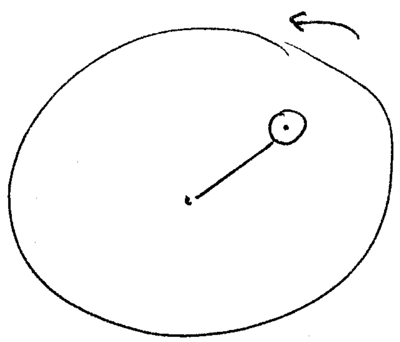
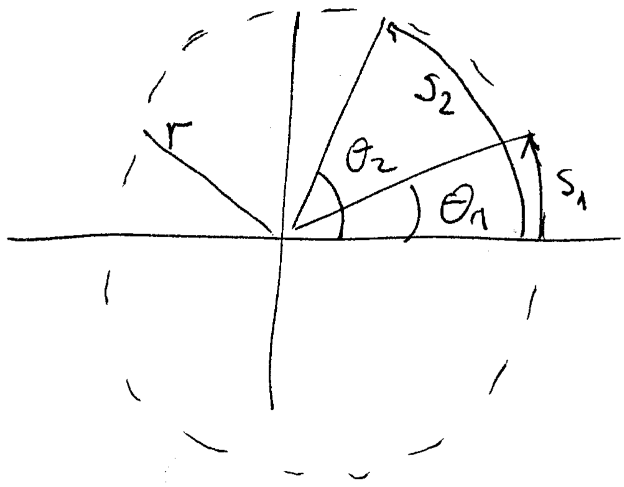
פרק 11

גוף או חלק מגוף הנע בתנועה סיבובית





$\theta = S/r$ ברדיאנים

$\theta : 0 \to 2\pi$

$0 \to 360$

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ - מהירות זוויתית

$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ - תאוצה זוויתית

תנועה מעגלית במהירות זוויתית קבועה

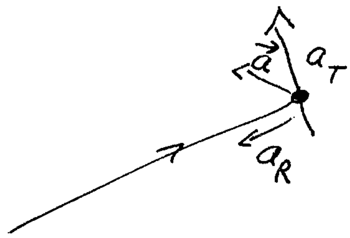
$\omega = \omega_0$ - קבוע

$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega_0 \qquad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0)$

כאשר הרדיוס קבוע בזמן

$$S = \theta r$$

$$S(t) = \theta_0 r + \omega_0 r (t - t_0)$$



$$\frac{dS}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot r$$

$$v_T = \omega r$$ מהירות משיקית $$\omega = \frac{v_T}{r}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \alpha r$$ תאוצה משיקית

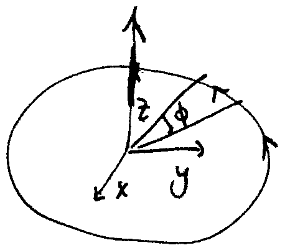
$$a_R = \frac{v_T^2}{r} = \omega^2 r$$

כלפי פנים

סה"כ קשר בין משתנים זוויתיים וקוויים

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \theta r \\ v_T &= \omega r \\ a_T &= \alpha r \\ a_R &= \omega^2 r \end{aligned}}$$

מהירות ותאוצה זוויתית - וקטורים



האם ניתן לתאר סיבוב כווקטור?

גודל: פשוט ϕ כיוון? - לפי כלל יד-ימין - הסבר

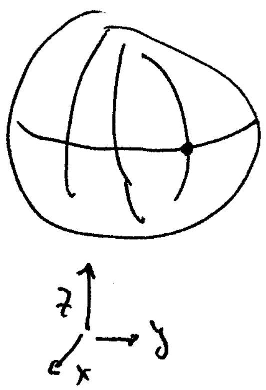
$\vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2 \stackrel{?}{=} \overrightarrow{\phi_1 + \phi_2}$

גודל מתחבר באותו כיוון

בסדר עובד עבור אותו כיוון

האם בשלושה מימדים?

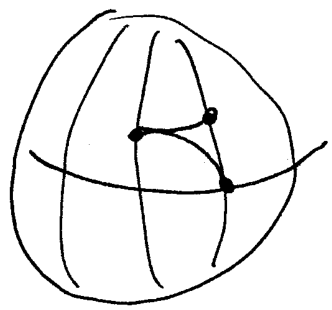
$\vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2 = \vec{\phi}_2 + \vec{\phi}_1$?



45 מסביב לציר z

90 מעלות מסביב לציר x

הנקודה מגיעה לקצה הכיפה



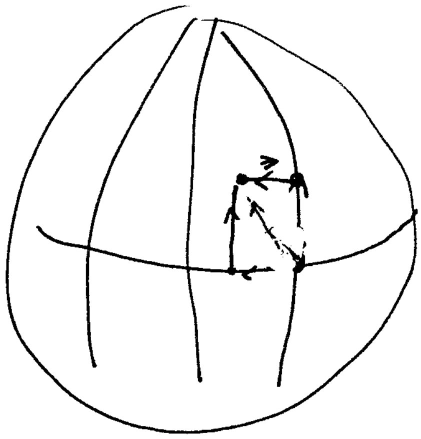
90 מעלות ציר x

45° מסביב לציר z

מגיעה לאמצע הדרך

באופן כללי סיבובים אינם וקטורים!

סיבוב קטנים כן!



כל זמן שנדבר כמעט שטוח

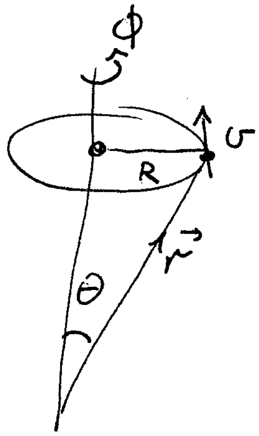
הווקטורים מתחברים כווקטורים

$$\hat{x}+\hat{z} = \hat{z}+\hat{x}$$

אם סיבובים קטנים מתחברים כווקטור אז מהירות זוויתיות יתחברו כווקטורים

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

$v = \omega$



$$W_T = \omega R = \omega r \sin\theta$$

וכיוון ?

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

מכפלה וקטורית:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$$

$C = AB\sin\theta$ $\qquad$ $\vec{A}\times\vec{A} = 0$

$\hat{C}$ - מאונך למישור ש $\vec{A},\vec{B}$

פורשים והכיוון לפי כלל

יד ימין, 3 אצבעות.

תרגיל 11-7

צוללן משלים 2.5 סיבובים בקפיצה מקפצה בגובה 10מ'.
הצוללן מתחיל ממהירות אנכית 0. מהי מהירותו הזוויתית?
(הנח מהירות זוויתית קבועה.)

$$\Delta\theta = 2.5\cdot 2\pi$$

$$\frac{1}{2}gt^2 = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx_{\text{ש'}} \sqrt{2} \approx 1.4$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2.5\cdot 2\pi}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \approx_{\text{רד'/ש'}} \frac{5\pi}{\sqrt{2}} \approx_{\text{רד'/ש'}} 3.5\pi \approx_{\text{רד'/ש'}} 11.2$$

$$2\pi\ \frac{\text{רד'}}{\text{ש'}} = 1\ \frac{\text{ס'}}{\text{ש'}}$$

11-13 - המהירות הזוויתית של מנוע עלה מ-1170 $\frac{\text{ס'}}{\text{דקה}}$
ל-2880 $\frac{\text{ס'}}{\text{דקה}}$ ב-12.6 ש'. מהי התאוצה הזוויתית?
כמה סיבובים עושה המנוע בזמן זה? הנח תאוצה
זוויתית קבועה.

$$1170\ \frac{\text{ס'}}{\text{דקה}} = 1170\cdot\frac{2\pi}{60}\ \frac{\text{רד'}}{\text{ש'}} \approx 122.5\ \frac{\text{רד'}}{\text{ש'}}$$

$$2880\ \frac{\text{ס'}}{\text{דקה}} = 301.6\ \frac{\text{רד'}}{\text{ש'}}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{301.6 - 122.5}{12.6} \underset{2\text{ ספ'}}{\overset{3\text{ ספ'}}{\simeq}} 14.2 \simeq 2.3$$

מס' סיבובים

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x_f} \frac{dx}{dt}\, dt$$

$$\Delta\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{d\theta}{dt}\, dt = \int \omega\, dt$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \alpha(t) = \text{קבוע}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\Delta\theta = \int (\omega_0 + \alpha t)\, dt = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= \underset{\text{ש}}{\overset{3\text{ ספ'}}{}} 122.5 \cdot 12.6 + \frac{1}{2} \cdot 2.3 \cdot 12.6^2$$

$$\simeq 1544 + 179 \underset{3\text{ ספ'}}{\simeq} 1723 \simeq 274$$

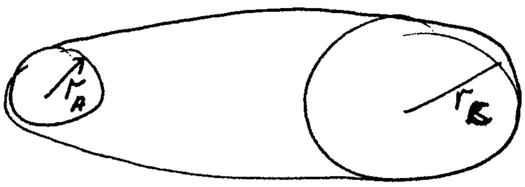
מספר נקודה עשרונית

11-24

מהי המהירות הזוויתית של מכונית המסתובבת במסלול מעגלי ברדיוס 110 מ' במהירות 50 קמ"ש?

$$\omega = \frac{v}{R} \approx \frac{14 \text{ מ'/ש'}}{110 \text{ מ'}} \approx 0.1 \text{ רדי'/ש'} \qquad v \approx \frac{50}{3.6} \approx 14 \text{ מ'/ש'}$$

11-35



$r_A = 10$ ס"מ

$r_C = 25$ ס"מ

הרצועה אינה מחליקה.

גלגל A מתחיל ממנוחה ~~הלה~~ ומסתובב ~~למהירות~~ בתאוצה זוויתית של 1.6 רד'/ש'^{2}

תוך כמה זמן יגיע גלגל C למהירות של 100 סיבובים לדקה

הרצועה אינה מחליקה $\Leftarrow$

$$v_A = v_C$$

$$R_A \omega_A = R_C \omega_C$$

$$\omega_C = \frac{R_A}{R_C}\omega_A$$

$$\alpha_C = \frac{R_A}{R_C}\alpha_A$$

$$\omega_C = \alpha_C \Delta t = \frac{R_A}{R_C}\alpha_A \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{R_C}{R_A}\frac{1}{\alpha_A}(\omega_C)_f$$

$$= \frac{25}{10}\cdot\frac{1}{1.6 \text{ רד'/ש'}^2}\cdot\frac{100 \cdot 2\pi}{60}\text{ רד'/ש'}$$

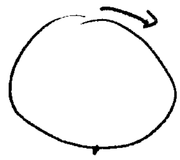
$$\cong 16.4 \text{ ש'}$$

11-39.

מכונית נוסעת במהירות 97 קמ"ש, קוטר גלגליה 76 ס"מ

א. מהי המהירות הזוויתית של הגלגל מסביב לציר?

ב. המכונית עוצרת תוך 30 סיבובי גלגל. מהי התאוצה הזוויתית? מהו מרחק העצירה?



א.

כל סיבוב המכונית מתקדמת $2\pi r$ מ'

$$v = \frac{2\pi r}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

$$v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{97}{0.38 \cdot 3.6} = \frac{\text{רד'}}{\text{ש'}}$$

97 קמ"ש $= \frac{97}{3.6}$ מ'/ש'

ב.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{\Delta t_{30}} =$$

$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t}$$

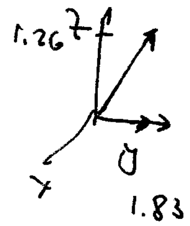
$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

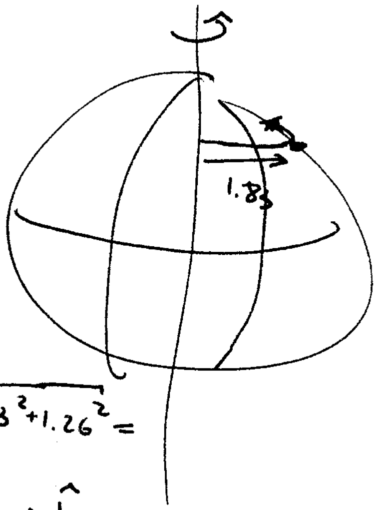
$$= v_0 t + \frac{1}{2} \frac{v - v_0}{\cancel{t}} t^{\cancel{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(v + v_0) t$$

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v + v_0} = \frac{30 \cdot 2\pi r}{97\ \text{קמ"ש}}$$

11-42





$\vec{r} = 1.83\hat{j} + 1.26\hat{k}$

$r = \sqrt{1.83^2 + 1.26^2} =$

$\omega = 14.3\hat{k}$ רד'/ש'

$\alpha = -2.66\hat{k}$ רד'/ש'^{2}

א. מהי מהירות הגוף?

ב. מהי תאוצתו?

ג. מה רדיוס הסיבוב של הגוף?

$v_T = \omega r = 14.3 \cdot 1.83$ מ' $=$ מ'/ש'

$a_T = \alpha r = -2.66 \cdot 1.83$ מ'/ש'^{2}

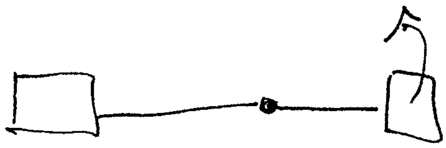
$a_R = -\frac{v^2}{r}\hat{j} = -\omega^2 r\hat{j}$

$\boxed{r = 1.83}$

1/

דינמיקה של תנועה סיבובית - פרק 12

הגודל הבסיסי אינו כוח בלבד



הפעלת כוח בנקודות שונות גורמת לתוצאות שונות!

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ torque מומנט - פיתול

$[\tau] = [\text{ניוטון}][\text{מ'}] = [\text{ג'}]$

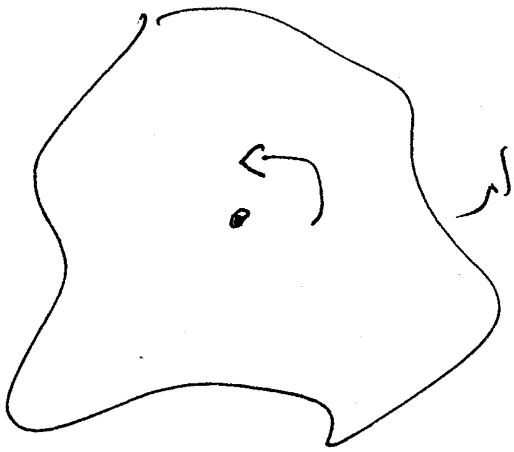
יחידות של עבודה

$\tau = rF\sin\theta$

לפי חוק יד ימין.

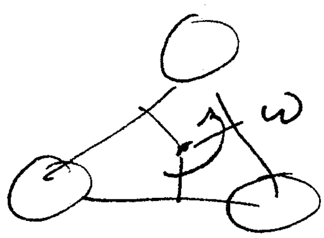
<u>אנרגיה קינטית של סיבוב</u>

גוף צפיד (קשיח)



כל נקודה מסתובבת במהירות זוויתית זהה.

<u>גוף אחד:</u> $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$



$$K = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2$$ כמה גופים

רציף

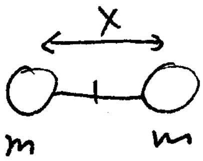
$$K = \frac{1}{2}\left(\int dm\, r^2\right)\omega^2$$

נגדיר I - מומנט אינרציה [ק"ג מ' ^{2}]

$$I = \int dm\, r^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

(נזכיר מרכז מסה $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, \vec{r}$)

מקביל לנוסחה $K = \frac{1}{2} m v^2$ עבור גוף נקודתי

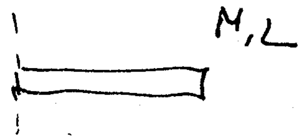


<u>דוגמא:</u> מומנט אינרציה:

$$I = m\left(\frac{x}{2}\right)^2 + m\left(\frac{x}{2}\right)^2 = m\frac{x^2}{2}$$

<u>דוגמא:</u> מומנט אינרציה של מוט סביב ציר בקצה

$$I = \int dm\, x^2$$



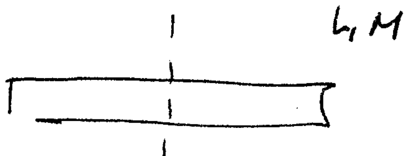
$$\rho = \frac{M}{L} \qquad dm = \rho\, dx = \frac{M}{L}dx$$

$$I = \int \frac{M}{L} dx\, x^2 = \frac{M}{L}\int_0^L dx\, x^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

3/

סביב ציר באמצע

המשך דוגמא:

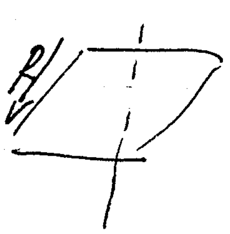


$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L} dx\, x^2 = \frac{M}{L} \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{2M}{3L} \left(L/2\right)^3$$

$$= \frac{1}{12} M L^2$$

— מה האנרגיה הקינטית של דיסקה מרובעת המסתובבת סביב ציר באמצע במהירות זוויתית ω,

דוגמא נוספת:



מומנט אינרציה של דיסקה מרובעת סביב ציר אמצעי

$\rho = M/R^2$

$$I = \int dm\, r^2 = \int_{-R/2}^{R/2} dx \int_{-R/2}^{R/2} dy\, (x^2+y^2)\, \rho\, dx dy$$

$$= \frac{M}{R^2} \int_{-R/2}^{R/2} dx \int_{-R/2}^{R/2} dy\, (x^2+y^2) =$$

$$\int_{-R/2}^{R/2} dy\, (x^2+y^2) = \int_{-R/2}^{R/2} dy\, x^2 + \int_{-R/2}^{R/2} dy\, y^2$$

$$= \int_{-R/2}^{R/2} dx \int_{-R/2}^{R/2} dy\, x^2 + \int_{-R/2}^{R/2} dx \int_{-R/2}^{R/2} dy\, y^2 =$$

$$= \left(\int_{-R/2}^{R/2} dx\, x^2\right)\left(\int_{-R/2}^{R/2} dy\right) + \left(\int_{R/2}^{R/2} dx\right)\left(\int_{-R/2}^{R/2} dy\, y^2\right) =$$

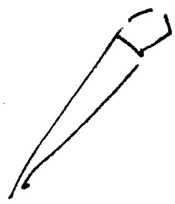
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3 \cdot R + R \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\,\frac{R^3}{8} = \frac{1}{6} R^{\cancel{3}4}$$

ד

$$I = \frac{M}{R^2} \cdot \frac{1}{6} R^4 = \frac{1}{6} M R^2$$

<u>דוגמה:</u> דיסקה מלאה ברדיוס R, צפיפות ρ, מסה M

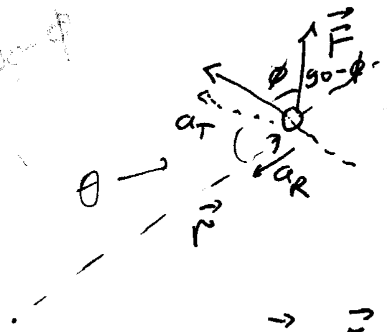
$$\int r^2\, dm \qquad \int r^2 \,\frac{M}{\pi R^2} \cdot r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \qquad dm = \rho\, dx\, dy = \rho\, r\, dr\, d\theta$$



$$\rho = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

הקשר בין מומנט ותאוצה



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F_T = m a_T$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r F \cos\phi = r F_T$$

$$\sin(90-\phi)$$

$$F_T = m a_T$$

$$\tau = F_T r = m a_T r = m\, \alpha r \cdot r = m \cdot r^2 \alpha$$

$$\tau = I \alpha$$

$$\sum \tau = I\alpha \qquad \text{באופן כללי}$$

בדרך אחרת:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \underbrace{F\cos\phi\, r}_{\tau}\, d\theta = \tau\, d\theta$$

$$dW = \tau\, d\theta$$

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega \qquad (P = \tau\omega)$$

הספק

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I\omega \frac{d\omega}{dt} = I\omega\alpha$$

משפט עבודה-אנרגיה

$$I\omega\alpha = \tau\omega \qquad \frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt}$$

$$I\alpha = \tau$$

4

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \overbrace{\tau\, d\theta}^{dW} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\alpha\, d\theta$$

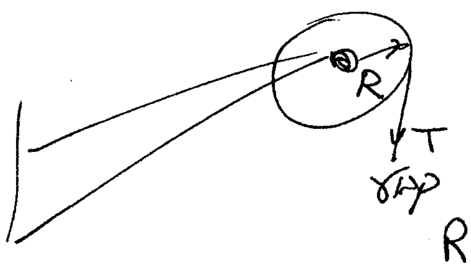
כמו הלינארית
$\tau = I\alpha$

$$= \int_{t_i}^{t_f} I\alpha \frac{d\theta}{dt}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} I \frac{d\omega}{dt}\,\omega\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} I \frac{d}{dt}(\omega^2)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$$

משפט עבודה-אנרגיה!

<u>דוגמא:</u>



דיסקה עגולה
במסה M, רדיוס R

נדרש: מהירות זוויתית, תאוצה זוויתית, אנרגיה קינטית

$I = \frac{1}{2} MR^2$

$\tau = TR$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR}{\frac{1}{2}\frac{MR^2}{\cancel{M}}} = \frac{2T}{MR}$$

יחידות
$\frac{\text{ק"ג מ'}}{\text{ש'}^2 \text{ ק"ג מ'}} = \frac{1}{\text{ש'}^2}$ ✓

$$\omega(t) = \alpha t + \cancel{\omega_0} = \frac{2T}{MR} t$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\cdot\left(\frac{2T}{MR}t\right)^2$$

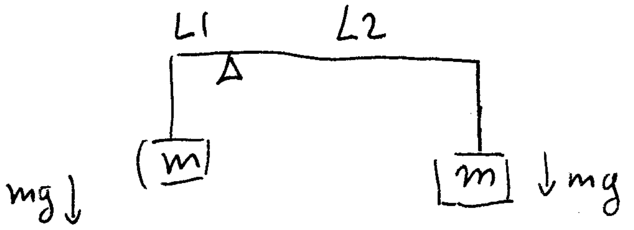
$$= \frac{1}{4} M\cancel{R^2}\cdot\frac{4T^2}{M^2\cancel{R^2}}\cdot t^2 = \frac{T^2}{M}t^2$$

לגבי K משמעות?

$\frac{\text{ק"ג}^2 \text{ מ'}^2}{\text{ש'}^4 \cancel{\text{ק"ג}}} \cdot \text{ש'}^2 = \text{ק"ג}\left(\frac{\text{מ'}}{\text{ש'}}\right)^2$ ✓

12-28

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$$



נחשב תאוצות קווית של הגופים כאשר הם מתחילים
לנוע

$\tau_1 = mg \cdot L1$ (החוצה)

$\tau_2 = -mg L2$ (פנימה)

$$\sum \tau = -mg\,(L2 - L1)$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \sum \vec{\tau}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \sum \vec{\tau}$$

$F_1 = \frac{\sum \tau}{-L1} = +mg\left(\frac{L2 - L1}{L1}\right)$ כלפי מעלה.

$F_2 = \frac{\sum \tau}{L2} = -mg\left(\frac{L2 - L1}{L2}\right)$ כלפי מטה.

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = g\,\frac{(L_2 - L1)}{L1} = g\left(\frac{L2}{L1} - 1\right)$$

$$a_2 = \frac{F_2}{m} = -g\,\frac{(L2 - L1)}{L2} = g\left(1 - \frac{L1}{L2}\right)$$

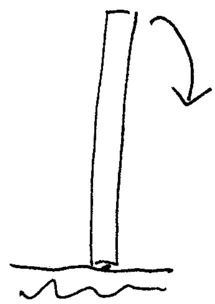
$L1 : L2 = 1 : 1$ אין תאוצה!

$L1 : L2 : 1 : 4$

$a_1 = +3g$

$a_2 = -3/4\, g$

12-33



א) מהי מהירות הקצה ברגע הפגיעה?

אנרגיה נשמרת:

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Ecm אנרגיה כללית

$$E = \int_0^L dm\, g y = \int_0^L \rho g y = \frac{M}{L} g \frac{y^2}{2}\Big|_0^L \underset{\left(\rho = \frac{M}{L}\right)}{=} \frac{1}{2} M g L.$$

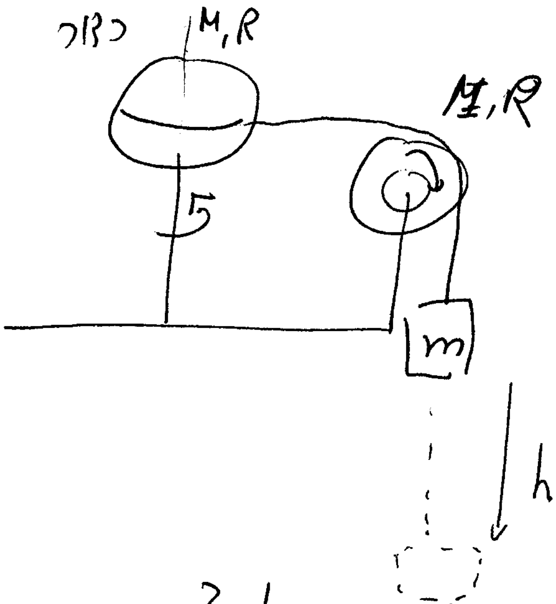
$$I = \frac{1}{3} M L^2$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2} M g L}{\frac{1}{2} I} = \frac{\cancel{M} g \cancel{L}}{\frac{1}{3} \cancel{M} L^{\cancel{2}}} = 3\frac{g}{L}$$

מ' / (ש'² מ') = [illegible] / ש'²

$$v = L \cdot \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \cdot L = \sqrt{3gL}$$

12-34



(נתון, אינו מחליק)

א. מהי מהירות הגוף לאחר שנפל מרחק h ?

ב. מהי המהירות הזוויתית של הכדור? הדיסקה?

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} I_{\text{כדור}} \omega^2_{\text{כדור}} + \frac{1}{2} I_{\text{דיסקה}} \omega^2_{\text{דיסקה}}$$

$$v = \omega_{\text{כדור}} R = \omega_{\text{דיסקה}} R$$

$$\omega_{\text{דיסקה}} = \omega_{\text{כדור}}$$

$$\vec{\omega}_{\text{דיסקה}} \neq \vec{\omega}_{\text{כדור}}$$

$$mgh = \left[\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\frac{I_{\text{כדור}}}{R^2} + \frac{1}{2}\frac{I_{\text{דיסקה}}}{R^2}\right] \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\frac{I_{\text{כדור}}}{R^2} + \frac{1}{2} I_{\text{דיסקה}}/R^2}} = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2}m + \frac{1}{5}M + \frac{1}{4}M}}$$

$$I_{\text{כדור}} = \frac{2}{5}MR^2 \qquad = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2}m + \frac{9}{20}M}}$$

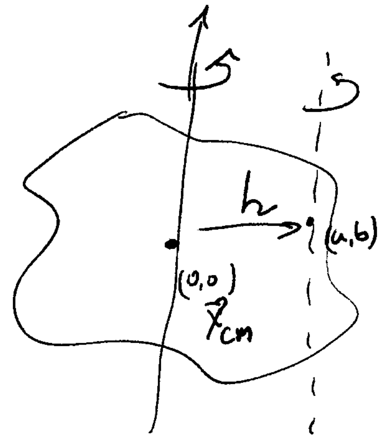
$$I_{\text{דיסקה}} = \frac{1}{2}MR^2$$

2gh בנפילה חופשית

$M >> m$, $M << m \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$

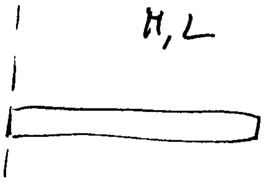
$$v = \sqrt{\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{20}{9}gh}$$

משפט צירים מקבילים

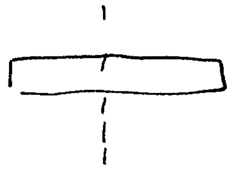


דוגמאות:

M, L



$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I = \int dm\, r^2 = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] dm =$$

$$= \int \left[(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2yb + b^2)\right] dm =$$

$$= \int (x^2 + y^2)\, dm + \int dm\,(a^2 + b^2) - 2a \underbrace{\int x\, dm}_{x_{cm}=0} - 2b \underbrace{\int y\, dm}_{y_{cm}=0}$$

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

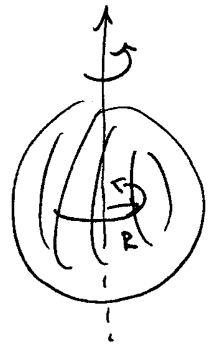
לבדוק:

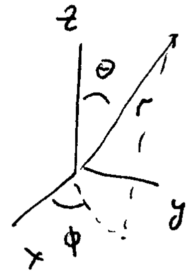
$$I = \frac{1}{12} ML^2 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

✓

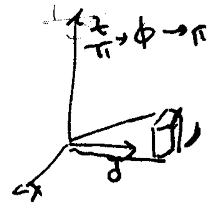
מומנט אינרציה של כדור מלא בצפיפות אחידה, סיבוב סביב ציר z

רדיוס R
מסה M





$dr = dz$
$d\cancel{y} = r\,d\theta$
$dx = ?$



$$I = \int dm\, R^2$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

$dy = dr$
$dx = r\,d\phi$
$dz = r\,d\theta$

$dx\,dy\,dz = r^2 dr\,d\theta\,d\phi$

$dx\,dy\,dz = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

בלי הוכחה.

$$dm = \rho\, dx\,dy\,dz = \rho\, r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$M = \int dm = \int_0^R \rho r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$= \rho \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$= 4\pi\rho \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \boxed{\frac{4\pi}{3}\rho R^3 = M}$$

$$I = \int dm R^2 = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \cdot r^2\sin^2\theta \cdot \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$$

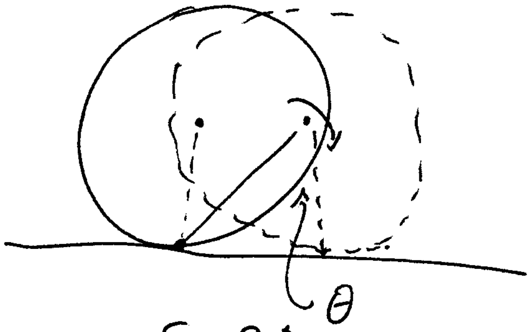
$$R^2 = x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r^2\sin^2\theta$$

$$= 2\pi\rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = 2\pi\rho\ \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 \cdot \frac{2}{5} R^2$$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \int_{-1}^{1} d\cos\theta\,(1 - \cos^2\theta) = \int_{-1}^{1} dt\,(1 - t^2) = t - t^3/3\Big|_{-1}^{1} = 4/3$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

<u>גלגול:</u> צירוף של תנועה צירית וקווית



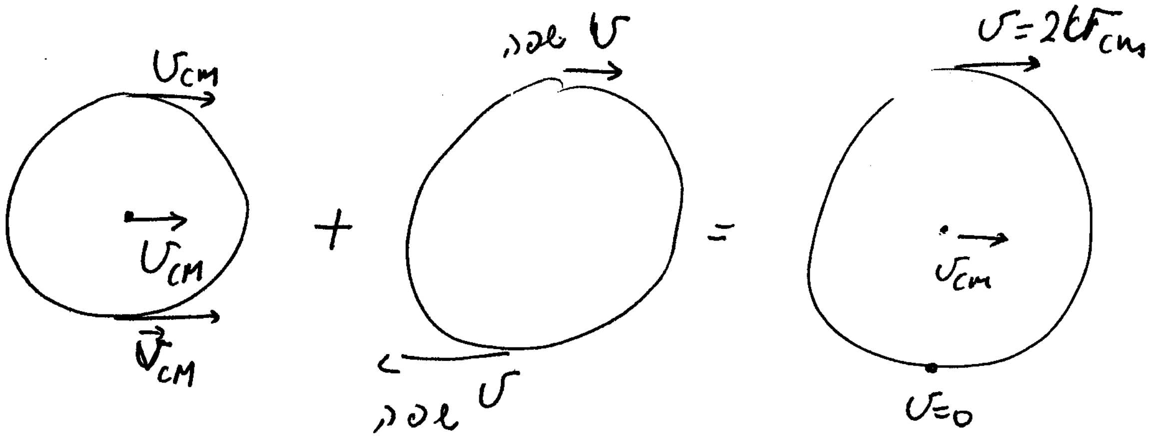
<u>גלגול ללא החלקה:</u>

$$S = R\Delta\theta \Rightarrow \Delta x_{CM} = R\Delta\theta$$

$$v_{cm} = \frac{\Delta x_{CM}}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$

$$\boxed{v_{CM} = R\omega}$$

מצד שני גם $v_{\text{שפה}} = R\omega$
ביחס למרכז מסה, איך זה מסתדר?



אנרגיה קינטית של גלגול

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

החיכוך בנקודת המגע הוא חיכוך סטטי!
ולכן לא עושה עבודה.

יחס אנרגיה קינטית גלגול/קווי

חישוק $I = MR^2$ — 1 : 1

דיסקה $I = \frac{1}{2}MR^2$ — 1/3 2/3

כדור $I = \frac{2}{5}MR^2$ — 2/7 5/7

קווית / גלגול

שלישי ↑ שני ↑ ראשון

$1 + 2/5 = \frac{7}{5}$

$$K = \frac{1}{2}MU_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(M + I/R^2\right)U_{cm}^2$$

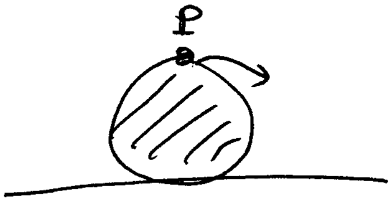
$$Mgh = \frac{1}{2}U_{CM}^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right)$$ שימור אנרגיה

כדור $U_{CM} = \sqrt{\dfrac{2gL\sin\theta}{1+2/5}}$ 2.7 מ׳/ש׳

דיסקה $U_{CM} = \sqrt{\dfrac{2gL\sin\theta}{1+1/2}}$ 2.6 מ׳/ש׳

חישוק $U_{cm} = \sqrt{\dfrac{2gL\sin\theta}{2}}$ 2.3 מ׳/ש׳

דוגמא 3



$R = 8.5$ ס"מ

$v = 15$ ס"מ/שנ'

א. מהי המהירות הרגעית של P ? $2v_{CM} = 30$ ס"מ/שנ'

ב. מהי המהירות הזוויתית של הדיסקה

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R} = \frac{15 \text{ ס"מ/שנ'}}{8.5 \text{ ס"מ}} \approx 1.8 \text{ רד'/שנ'} \approx 0.28 \text{ סב'/שניה}$$

ג. מהי האנרגיה הקינטית, איזה חלק בא מסיבוב ומיזה מתנועה קווית?

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 =$$

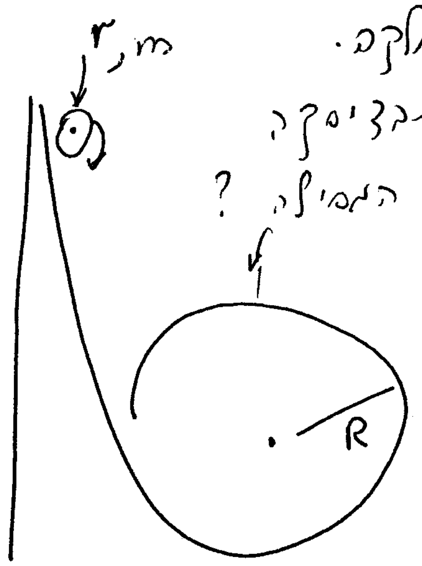
$$= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{v_{CM}^2}{R^2} =$$

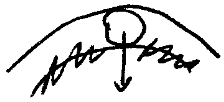
$$= \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} M}_{\text{תנועה}} + \underbrace{\frac{1}{4} M}_{\text{גלגול}} \right\} v_{CM}^2$$

תנועה 2/3 גלגול 1/3

21-5

הדיסקה מתגלגלת ללא החלקה.
מהו הגובה המינימלי h כך שהדיסקה
~~[illegible]~~ תעבור את ~~קצה~~ ראש המסילה ?





$$mg = ma_R$$

$$g = \frac{v^2}{R}$$

$$v^2 = gR$$

שימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = mg(h-2R)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = mg(h-2R)$$

$\omega = v/r$

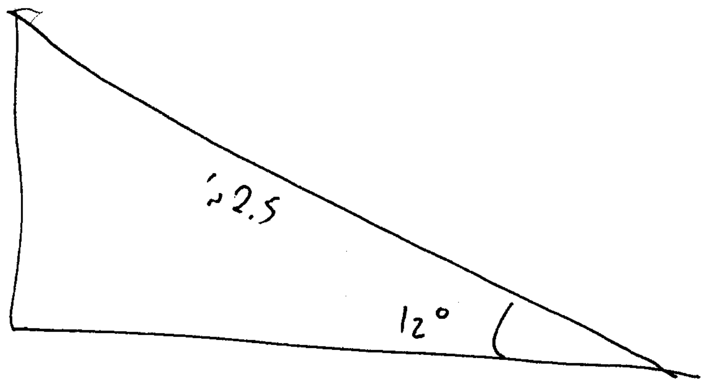
$$\frac{3}{4} m v^2 = mg(h-2R)$$

$$\frac{3}{4} \cancel{m} \cdot gR = \cancel{mg}(h-2R)$$

$$h - 2R = \frac{3}{4} R$$

$$h = 2\tfrac{3}{4} R$$

תרגיל:



חישוק, דיסקה וכדור בעלי (אותה) מסה M ורדיוס R

מתגלגלים מראש המדרון (מי צפוף יותר?)

א. באיזה סדר יגיעו למטה?

ב. באיזו מהירות יגיעו?

כדי שיהיו בעלי אותה מסה החישוק

צריך להיות צפוף (בהרכבה) מהדיסקה שצריכה

להיות צפופה בהרכבה מהכדור

$$\rho_{\text{דיסקה}} \cdot \underbrace{w\pi R^2}_{\text{נפח}} = \underbrace{4\pi R^3}_{\text{נפח}} \rho_{\text{כדור}}$$

עובי

$$2\pi R \cdot w_1 \cdot w_2 \, \rho_{\text{חישוק}} = \pi R^2 \rho_{\text{דיסקה}} w_3$$

$$\frac{\rho_{\text{דיסקה}}}{\rho_{\text{כדור}}} = 4 R/w$$

$$\frac{\rho_{\text{חישוק}}}{\rho_{\text{דיסקה}}} = \frac{w_3 \cdot R}{w_1 \cdot w_2}$$