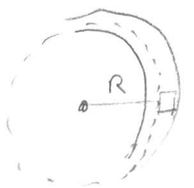
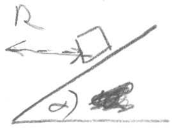
ב"ה

פתרון - 1_3141:

מבט-על: מבט-צד





מכונית בכביש מעגלי מוגבה:

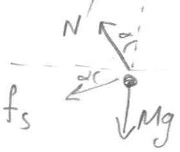
$R = 100\,m$

זווית הטיה $\alpha = 10^\circ$

מקדם חיכוך סטטי $\mu_s = 0.3$

← נתון חיכוך סטטי כי הכוונה היא לתנועה במעגל, כאשר החיכוך מונע עליה או ירידה לאורך המדרון המשופע!

← אם המכונית נוסעת מהר מדי היא "נזרקת" החוצה מהמעגל כלומר עולה במדרון, במהירות המקסימלית המותרת זה נמנע ע"י החיכוך הסטטי, ולכן הכוחות הם:



בכיוון מרכז המעגל:

$$(1) \quad \sum F_r = f_s \cos\alpha + N \sin\alpha = M a_r = M\frac{v^2}{R}$$

בכיוון הניצב:

$$(2) \quad \sum F_z = N\cos\alpha - f_s \sin\alpha - Mg = 0$$

על גבול החלקה:

$$(3) \quad f_{s,max} = \mu_s \cdot N$$

נציב (3) בתוך (2) ונקבל:

$$N(\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha) = Mg$$

$$N = \frac{Mg}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}$$

נציב ב- (1):

$$\cancel{M}g\left[\frac{\mu_s \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}\right] = \cancel{M}\frac{V^2}{R}$$

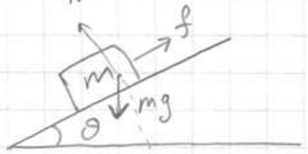
$$V_{max} = \sqrt{Rg\cdot\frac{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}} = \sqrt{100\cdot 9.8\cdot\frac{0.47}{0.93}} \approx 22.2\ m/s$$

$[\approx 80\ km/h]$

הערה: שימו לב שקיימת גם מהירות מינימלית, שמתחתיה המכונית תחליק למטה!

4) חיכוך סטטי וקינטי:

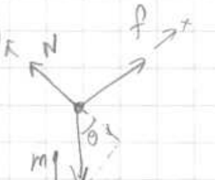
נתונים: $\mu_k=0.1$ $\mu_s=0.3$, $m = 5\ kg$



החיכוך הסטטי <u>המקסימלי</u> הינו:

$$f=\mu_s\cdot N$$

הזווית המקסימלית שבה <u>יתכן</u> שיווי-משקל:



$$\begin{cases} f - mg\sin\theta = 0 & \text{:בכיוון המישור} \\ N - mg\cos\theta = 0 & \text{:בכיוון ניצב למישור} \end{cases}$$

$$N = mg\cos\theta$$

$$f=\mu_s N=\mu_s \cancel{m}g\cos\theta=\cancel{m}g\sin\theta \leftarrow$$ מסה לא משפיעה!

$$\tan\theta_{max}=\mu_s$$

$$\theta_{max}=\arctan\mu_s=16.7^\circ$$

ב. תאוצה עבור זוויות שונות מחושבת ע"י חיכוך קינטי:

$$\begin{cases} mg\sin\theta - f = ma \\ N = mg\cos\theta \end{cases}$$

$$f_k=\mu_k\cdot N=\mu_k mg\cos\theta$$

$$\cancel{m}g\sin\theta-\mu_k \cancel{m}g\cos\theta=\cancel{m}a$$

$$a=g[\sin\theta-\mu_k\cos\theta]$$ $\leftarrow$ לשים לב ליחידות

$$a(\theta=45^\circ)=g\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-0.1)=6.24\ m/s^2$$

$$a(\theta=60^\circ)=g\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-0.1\cdot\frac{1}{2}\right]\approx 8\ m/s^2$$

גוף מחליק

נפתור את השאלה ע"י חישוב העבודה שנעשתה על הגוף, והשוואת עבודה זו להפרש האנרגיה הקינטית.
על הגוף פועלים שלושה כוחות: הכובד (mg), הנורמל (N), והחיכוך (f).
הנורמל תמיד ניצב לתנועה, ולכן לא מבצע עבודה.

1. בקטע המעגלי (A-B) כיוון כוח הכובד הוא כלפי מטה, והחלק הרלוונטי מכוח זה (המקביל לכיוון התנועה) הוא: $mg\cos\theta$
כיוון כוח החיכוך הוא תמיד נגד כיוון התנועה, וגודלו משתנה על פי הנוסחא שניתנה לנו בשאלה.
המסלול שלנו הוא לאורך קשת המעגל, ולכן : $ds = Rd\theta$
לסיכום, סך העבודה שנעשתה על הגוף בקטע המעגלי היא:

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (mg\cos\theta - \frac{b}{\pi^4}\theta^3) Rd\theta = \left(mg\sin\theta - \frac{b}{\pi^4}\frac{\theta^4}{4}\right)R\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = mgR - \frac{b}{\pi^4}\frac{\pi^4}{64} = mgR - \frac{b}{64}R$$

נשאלנו מה יהיה המקדם b כך שמהירות בנקודה B תהיה זהה למהירות בנקודה A, כלומר שסך העבודה שנעשתה על הגוף היא אפס. התשובה היא כש $b = 64mg$

2. בסעיף זה שואלים, עם המקדם b שמצאנו, מה יהיה המרחק B-C. למעשה, אם המקדם b הוא שמצאנו, אנחנו יודעים שלא התבצעה על הגוף עבודה בקטע המעגלי, ולכן מהירותו בנקודה B שווה למהירותו ההתחלתית v0 מהנקודה A!
אז השאלה היא מה המרחק שיעבור גוף עם מהירות התחלתית v0, כאשר פועל עליו חיכוך עם המקדם μ
מכיוון שהגוף מונח על השולחן, ולא מאיץ בכיוון האנכי, הנורמל שווה לכוח הכובד (N=mg). ולכן החיכוך הקינטי הוא:
$f_k = \mu N = \mu mg$
ורק החיכוך הקינטי עושה עבודה (הכובד והנורמל אנכים לתנועה). נחשב את העבודה לאורך קטע באורך L.

$$W = \int_0^L -\mu mg dx = -\mu mgL$$

עכשיו נוסיף את התנאי שהמהירות הסופית היא 0, ובעזרת משפט העבודה-אנרגיה :

$$m\frac{0^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = W = -\mu mgL$$

$$L = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

וזו התשובה לשאלה. כדאי לבדוק שהיחידות מסתדרות.

1/34
103/34
304/28

הספק: קצב ביצוע העבודה

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} \Rightarrow P = \vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

יחידות

$$1W = \frac{1J}{s} \quad watt$$

$$1hp = 746W$$

קוט״ש Kilowatt hour

סך כל האנרגיה הנצרכת בשעה עבור הספק של 1kW

$$1kWh = 10^3 W\, 3600s = 3.6\cdot 10^6 J$$

למכונית הספק מקסימלי של 80 כוח סוס. מה המהירות המקסימלית של המכונית במישור אם נתון כח החיכוך הנובע מהאוויר $f = \frac{1}{2}D\rho A v^2$

כאשר

$D = 0.5$ – מקדם הגרר

$\rho = 1.3\frac{kg}{m^3}$ – צפיפות האוויר

$A = 2\,m^2$ – שטח החזית של המכונית.

הכח שהמנוע מפעיל צריך להתגבר על כח החיכוך והאוויר מגביל

$$P = f\cdot V = \frac{1}{2}D\rho A V^3 \Rightarrow V_{max} = \left(\frac{2P}{D\rho A}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2\cdot 80\cdot 746}{0.5\cdot 1.3\cdot 2}\right)^{\frac{1}{3}} = 45\frac{m}{s} =$$

$$= 162\frac{km}{h}$$

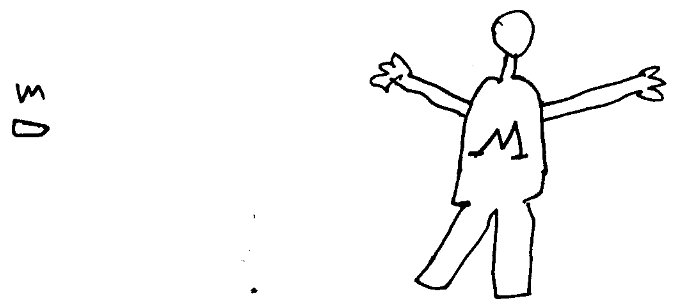
כמה אנרגיה צריך כדי לעבור 100 ק״מ במהירות המקסימלית?

כמה -״- במהירות 90 קמ״ש?

$$W_1 = \vec{F}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}D\rho A V_{max}^2 S = 132\cdot 10^6 J \qquad W_2 = 41\cdot 10^6 J$$

תפיסת כדורים

תפיסת כדור היא התנגשות פלסטית:



נסמן את מסת הכדור ב m ומסת האדם ב M.

$M = 80kg$

$(M24)\ m_1 = 115 \cdot 0.0648 \cdot 10^{-3} = 7.45 \cdot 10^{-3} kg$

$V_1 = 2180 \frac{mi}{hr} = 3488 \frac{km}{hr} = 968.8\ m/sec$

$(0.45)\ m_2 = 230 \cdot 0.0648 \cdot 10^{-3} = 14.9 \cdot 10^{-3} kg$

$V_2 = 830 \frac{ft}{sec} = 276 \frac{m}{sec}$

לפי חוק שימור התנע

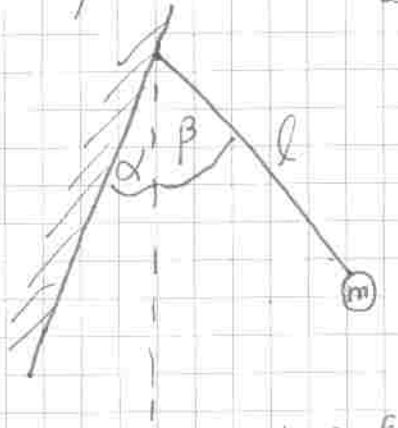
$m_1 V_1 = (m_1 + M) u_1$ — עבור $M24$

$m_2 V_2 = (m_2 + M) u_2$ — עבור 0.45

$u_1 = \left[\frac{m_1 V_1}{m_1 + M}\right] = 0.09 \frac{m}{sec}$ $\qquad$ $u_2 = \left[\frac{m_2 V_2}{m_2 + M}\right] = 0.051 \frac{m}{sec}$

המהירויות האלו נמוכות מאוד. אפילו אם אין תנועה האדם יחוש את הכדור ינוע במהירות איטית מאוד כלפי אחור.

4) נתונה מטוטלת התלויה מקיר עקום כמתואר בשרטוט.
היא מתחילה מתנודה כאשר $\beta>\alpha$. מצא את
זמן המחזור של התנועה: (הנח שבזמן ההתנגשות אין איבוד אנרגיה)
הנח $\alpha<\beta\ll 1$



פתרון: זמן המחזור של התנועה
הוא פעמיים הזמן שיקח למטוטלת להתנגש בקיר.

משוואת הכוחות:
(עבור θ קטן)

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$ ← משוואת האוסילטור

$$\Rightarrow \theta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad , \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\theta(t=0) = \beta \qquad \dot{\theta}(t=0) = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$A = \beta \qquad\qquad B\omega_0 = 0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \beta\cos(\omega_0 t)$$

המטוטלת
תתנגש בקיר כאשר

$$\theta(t) = -\alpha = \beta\cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}t = \arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \Rightarrow T = 2t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

ex-11-01

א) הגדלים הנשמרים:

תנע - בכיוון ציר $\hat{x}$ בלבד.

אנרגיה - נשמרת.

מרכז המסה - בכיוון ציר $\hat{x}$ בלבד.

ב) מכיון שנשמר אנרגיה:

$$E_i = E_f$$

i = ע״פ ההתחלה: המיקום ההתחלתי של m_2

$$(1) \quad m_2 g R = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

f = ע״פ הסופה: המסה m_2 הגיעה לנק' A

מכיון שנשמר תנע בכיוון ציר $\hat{x}$:

$$(2) \quad 0 = m_2 V_2 + m_1 V_1$$

מכיון (2) נקבל:

$$V_2 = -\frac{m_1}{m_2} V_1$$

נציב ב (1) ונקבל:

$$m_2 g R = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{m_1}{m_2} V_1\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \cancel{m_2} \frac{m_1^2}{m_2^{\cancel{2}}} V_1^2$$

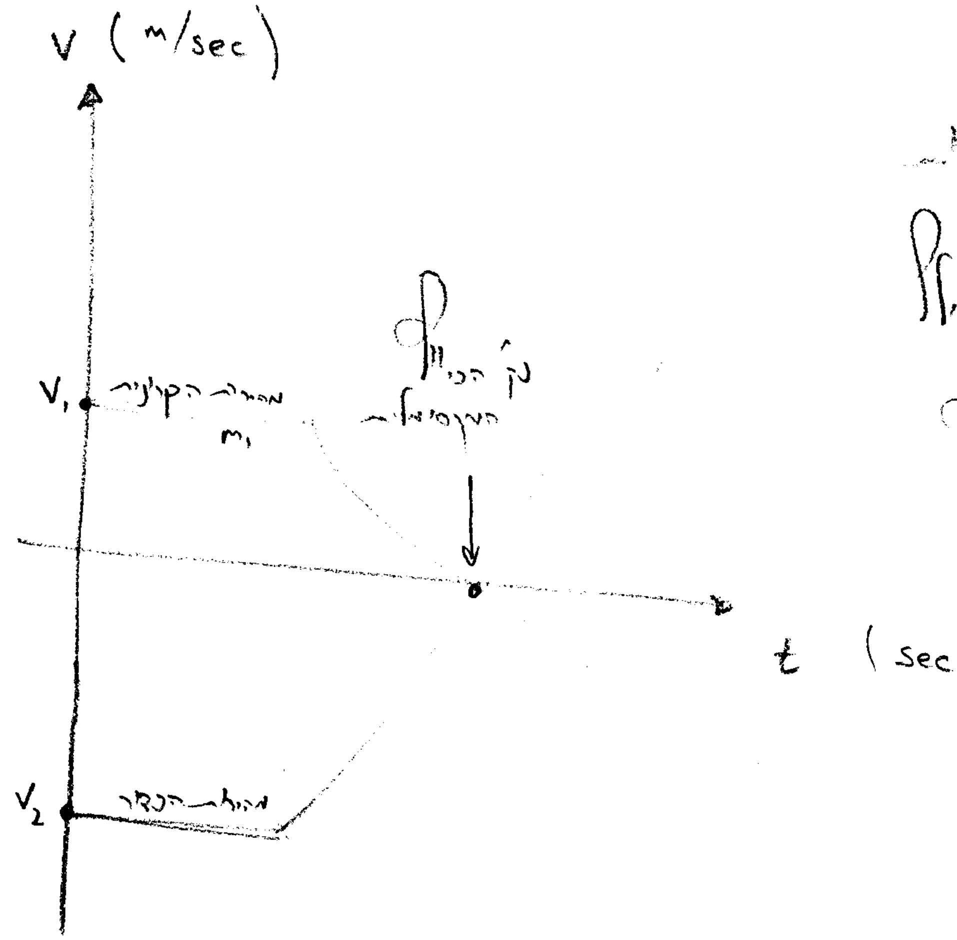
$$m_2 g R = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

$$V_1^2 = \frac{2 m_2 g R}{m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2 g R\, m_2}{m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}}$$

$$V_2 = -\frac{m_1}{m_2} V_1$$

$$\Rightarrow \quad V_2 = -\frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{2gR\,m_2}{m_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)}}$$

$$\boxed{V_2 = -\sqrt{\frac{2gR\,m_1}{m_2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)}}}$$



(ג) בשרטוט צריך להיות
של m_1 ו-m_2
מהירויות שהכדור הולך
את נק' A זה
כאן זה לשמר הכיוון
העקרוני.

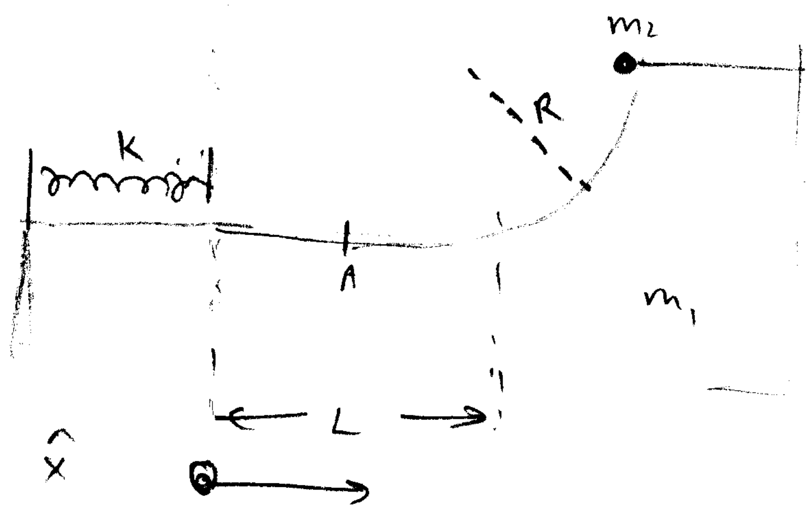
(ד) הכוח הקפיץ k קבוע: אין שינוי באנרגיה.

$$m_2 g R = \frac{1}{2} k x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{2 m_2 g R}{k}}$$

(ה) מרכז המסה בכיוון ציר $\hat{x}$ (נשאר קבוע)

$$X_{cm} = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2}$$



(האפס על ציר $\hat{x}$)

נקח את הראשית בתחילת הקפיץ: D - זוהי התזוזה של הקרונית ימינה.

הכיווץ שחישבנו בסעיף הקודם

$\Rightarrow$

$$\frac{m_2 \cdot (L+R) + m_1 \cdot 0}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (D-X) + m_1 D}{m_1 + m_2}$$

$\Rightarrow$

$$m_2 (L+R) = D(m_1 + m_2) - m_2 X$$

$$\frac{m_2 (L+R+X)}{m_1 + m_2} = D$$

$$D = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(L + R + \sqrt{\frac{2 m_2 g R}{k}}\right)$$ //

a. Linear momentum (No outer impulse in the plane of motion) and angular momentum (in respect to the center of mass of M+m, No outer torque) are conserved.

b. Using conservation of linear momentum:

$$P_x = mv_0 = (m+M)v \tag{1}$$

$$v = \frac{mv_0}{(m+M)} \tag{2}$$

The position of the center of mass:

$$L_{cm} = \frac{mR}{m+M} \tag{3}$$

The moment of inertia in respect to the CM:

$$I = \frac{MR^2}{2} + ML_{cm}^2 + m(R - L_{cm})^2 \tag{4}$$

Using conservation of angular momentum:

$$mv_0(R - L_{cm})\sin\beta = I\omega \tag{5}$$

$$\omega = \frac{mv_0(R - L_{cm})\sin\beta}{\frac{MR^2}{2} + ML_{cm}^2 + m(R - L_{cm})^2} \tag{6}$$

c. It is clearly an inelastic collision so:

$$\triangle E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{(m+M)v^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \tag{7}$$