תרגול #14 - תנודות הרמוניות

30 ביוני 2013

רקע תיאורטי

מתנד פשוט

כאשר יש לנו כח מחזיר, כח אשר רוצה "להחזיר" אותנו לנק' **שיווי משקל**. מתמטית מדובר בכח שפרופורציוני למינוס ההעתק, לדוגמא:

- קפיץ $-k\left(x-x_0\right)$
- מטוטלת (תנודה בזוויות קטנות) $-mg\sin\theta\simeq-mg\theta$

משוואת הכוחות תוביל אותנו לצורה הבאה:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0$$

כאשר ω_0 היא התדירות (הקרויה גם התדירות העצמית) והיא שורש המקדם לפני ההעתק.

- עבור קפיץ $\omega_0^2=\frac{k}{m}$
- עבור מטוטלת $\omega_0^2=\frac{g}{l}$

פתרון משוואה זו $x\left(t\right)$ היא הפונקציה ההרמונית:

$$x\left(t\right)=A\cos\left(\omega_0t+\phi\right)$$

A ו־ϕ הם קבועים ויש למצוא אותם אותם בעזרת שני תנאי התחלה $x\left(t=0\right)$ ו־$v\left(t=0\right)=\dot{x}\left(t=0\right)$. (**הערה:** לא מחייב שהתנאים יהיו בזמן $t=0$ למרות שלרוב זה יהיה כך. אם יש תנאי בזמן אחר $t\neq0$ יש להציב ערך זה של t במשוואות).

מתנד מרוסן

בתוספת לכח המחזיר ישנו גם כח גרר (כח חיכוך כלשהו). מתמטית מדובר בכח הפרופורציוני למינוס המהירות $\vec{F}=-b\vec{v}=-b\dot{\vec{x}}$. משוואת הכוחות תוביל אותנו לצורה הבאה:

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

כאשר $\gamma = \frac{b}{m}$. פתרון המשוואה $x\left(t\right)$ הוא:

$$x\left(t\right) = Ae^{-t/\tau}\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

זו פונקציה הרמונית שהאמפליטודה (משרעת) שלה הולכת וקטנה עם הזמן אקספוננציאלית עם **קבוע דעיכה** τ ובעלת תדירות ω השונה מהתדירות העצמית ω_0 של המתנד ללא הריסון.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2}{\gamma} \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} \end{aligned}$$

ישנם שני מצבים:

- **ריסון חלש** $\frac{1}{\tau} < \omega_0$ ־ במקרה זה כח החיכוך יחסית קטן והאמפליטודה תקטן לאט יחסית בזמן
- **ריסון חזק** $\frac{1}{\tau} > \omega_0$ ־ במקרה זה כח החיכוך יחסית חזק והמתנד לא יעשה תנודות כי האמפליטודה תקטן משמעותית בטרם יעבור מחזור שלם.
- **ריסון קריטי** $\frac{1}{\tau} = \omega_0$ ־ ערך המפריד בין שני המצבים לעיל.

ריסון חזק

עבור מקרה זה התדירות $\omega = i\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$ הוא מספר מרוכב ואז הפתרון הופך:

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= e^{-t/\tau}\left(A_1 e^{-\Omega t} + A_2 e^{+\Omega t}\right) \\ &= A_1 e^{-\left(\frac{1}{\tau}+\Omega\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{1}{\tau}-\Omega\right)t} \\ &= A_1 e^{-\Omega_1 t} + A_2 e^{-\Omega_2 t} \end{aligned}$$

כאשר $\Omega = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$.

ריסון קריטי

קיים רק במקרה שבו התדירות העצמית ω_0 שווה להופכי של קבוע הדעיכה τ. זהו ערך יחיד אשר נותן פתרון:

$$x\left(t\right) = Ae^{-t/\tau}$$

מתנד מאולץ

בתוספת לכח המחזיר ישנו כח מאלץ מהצורה $F = F_0 \cos\left(\omega_F t + \phi_F\right)$ כאשר ω_F, ϕ_F נתונים ואין צורך למצוא אותם. אם יש בבעיה גם כח גרר אז משוואת הכוחות תוביל למשוואה:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos\left(\omega_F t + \phi_F\right)$$

אם **אין** כח גרר אז לא נקבל תלות ב־$\dot{x}$ ולמעשה זה כמו להציב $\gamma = 0$. פתרון המשוואה הכללית **לאחר הרבה מאוד זמן** הוא מהצורה

$$x\left(t\right) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_F^2 - \omega_0^2\right)^2 + m^2\gamma^2\omega_F^2}} \cos\left(\omega_F t + \phi_F\right)$$

לאחר הרבה זמן (מה שקרוי מצב עמיד) אנו מקבלים ש־$x\left(t\right)$ עושה תנודות באותה תדירות כמו הכח המאלץ. כיוון שאנחנו לא "מתעסקים" עם הפתרון בזמנים התחלתיים לפני שהוא מגיע למצב עמיד, אין צורך להשתמש בתנאי התחלה.

רזוננס (תהודה)

כאשר תדירות המאלץ שווה לתדירות העצמית של המערכת $\omega_F = \omega_0$ מקבלים מצב תהודה, מצב בו התנודות חזקות ביותר ומגיעות לערך מירבי. בחיי היום יום משתמשים בתכונה זו כמו למשל במיקרוגל לשם חימום אוכל או ברדיו לשם מציאת תחנות בתדרים מסויימים. אולם לעיתים תכונה זו אינה רצויה (כמו בתכנון אולמות קונצרטים) ואף מסוכנת כמו במקרה של גשר מצר טקומה בוושינגטון ארה"ב.

שאלה 1_5205 - Restrained Pendulum

מטוטלת באורך l בעלת מסה m נעה בתווך המתנגד לתנועה ומעפיל כח $\vec{F}=-b\vec{v}$. ברגע $t=0$ התזוזה מהאנך היתה $\theta_0=0$ ומהירותה $v_0\neq 0$.
מצאו את הביטוי עבור $\theta\left(t\right)$ (בזוויות קטנות). הקפידו על חלוקה למקרים לפי הערך של b.

פתרון

הכוחות הפועלים על הטוטלת הם כח הכבידה כלפי מטה, כח המתיחות לאורך החוט וכח הגרר בניגוד למהירות. המטוטלת נעה על פני קשת של מעגל ולכן נבחר במערכת צירים רדיאלית ומשיקית. המהירות המשיקית מוכתבת על ידי משוואת הכוחות המשיקית:

$$\sum F_t=-mg\sin\theta-bv=ma_t$$

הכח שמפעיל כח הכבידה בכיוון המשיקי תמיד מצביע לכיוון שירצה להחזיר את המטוטלת ל־$\theta=0$ (נק' שיווי המשקל בו אין רכיב של כח הכבידה בכיוון משיקי). כח זה הוא כח מחזיר ולכן הוא חייב להיות בסימן שלילי. זה גם מסתדר עם הסימן של הזווית θ (בדקו!, כמו במקרה של קפיץ).
כח הגרר תמיד פועל בכיוון הפוך למהירות ולכן מופיע מינוס. בתנועה על פני מעגל אנו מתייחסים לתנועה המשיקית כאל תנועה חד מימדית והכיוון מקבל ביטוי באמצעות הסימן (חיובי/שלילי).
נזכור כי:

$$\begin{aligned} s &= l\theta \\ v &= \frac{ds}{dt}=l\frac{d\theta}{dt}=l\dot{\theta} \\ a_t &= \frac{dv}{dt}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}=l\ddot{\theta} \end{aligned}$$

כאשר s היא מקטע קשת על פני מעגל. בנוסף, מדובר בתנודות קטנות ולכן $\sin\theta\approx\theta$. נציב משוואת הכוחות, נשחק עם המשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} ml\ddot{\theta}+bl\dot{\theta}+mg\theta &= 0 \\ \ddot{\theta}+\frac{b}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\theta &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו את הצורה של משוואת **מתנד מרוסן** ונוכל לכתוב את הפתרון ולזהות את הקבועים:

$$\begin{aligned} \theta\left(t\right) &= Ae^{-t/\tau}\cos\left(\omega t+\phi\right) \\ \tau &= \frac{2m}{b} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{l}-\frac{b^2}{4m^2}} \end{aligned}$$

הפתרון לעיל הוא עבור **ריסון חלש** כאשר $\frac{g}{l} > \frac{b^2}{4m^2}$. כל שנותר לנו כעת הוא למצוא את המשרעת A והפאזה ϕ. ידוע כי $\theta\left(t=0\right)=\theta_0=0$. נציב ונקבל:

$$\begin{aligned}\theta\left(t=0\right) &= A\cos\phi=0\\ \Rightarrow\quad \phi &= \pm\frac{\pi}{2}\\ \\ \theta\left(t\right) &= Ae^{-t/\tau}\sin\left(\omega t\right)\end{aligned}$$

כעת נשתמש בתנאי ההתחלה עבור המהירות $v\left(t=0\right)=v_0$. הקשר בין מהירות לזווית $v=l\dot{\theta}$ ולכן:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}\left(t\right) &= Ae^{-t/\tau}\left[\omega\cos\omega t-\frac{1}{\tau}\sin\omega t\right]\\ \\ v\left(t=0\right)=v_0 &= l\dot{\theta}\left(t=0\right)=lA\left[\omega-0\right]=l\omega A\\ \Rightarrow\quad A &= \frac{v_0}{l\omega}\end{aligned}$$

(**הערה:** לא משנה אילו מהפאזות היינו בוחרים $\pm\frac{\pi}{2}$ היינו מקבלים את אותה התוצאה, כיוון שזה היה מתבטא בסימן $\pm$ המוכפל ב־A ומימלא מצאנו את ערכו בתנאי של המהירות. בדקו!)

לסיכום, הפתרון המלא הוא:

$$\theta\left(t\right)=\frac{v_0}{l\omega}e^{-t/\tau}\sin\left(\omega t\right)$$

עם הקבועים שפירטנו לעיל.

עבור המקרה של **ריסון חזק** $\frac{g}{l} < \frac{b^2}{4m^2}$ אנו נקבל:

$$\begin{aligned}\omega &= i\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{\tau}}=i\Omega\\ \theta\left(t\right) &= Ae^{-t/\tau}\sin\left(i\Omega t\right)=Ae^{-t/\tau}\sinh\left(\Omega t\right)\\ A &= \frac{v_0}{l\Omega}\end{aligned}$$

עבור **ריסון קריטי** $\frac{g}{l}=\frac{b^2}{4m^2}$ מקבלים $\omega=0$:

$$\begin{aligned}\theta\left(t\right) &= Ae^{-t/\tau}\cos\phi\\ \theta\left(t=0\right) &= A\cos\phi=0\\ \Rightarrow\quad \theta\left(t\right) &= 0\end{aligned}$$

אין פתרון במקרה של ריסון קריטי.

שאלה 1_5911 - שתי מסות

מערכת מורכבת משני גופים קטנים וזהים במסה m כל אחד, המחוברים באמצעות קפיץ עם קבוע k ואורך רפוי l_0. המערכת נמצאית על משטח אופקי וחלק. מפעילים על אחד הגופים כח מהצורה $f_0 \sin(\omega t)$ לאורך הקפיץ. נתון בנוסף כי $\omega \neq \omega_0$ התדירות של הכח שונה מהתדירות העצמית של המערכת.
לאחר זמן רב, מהי ההתארכות המירבית של הקפיץ?

פתרון

לפנינו שני גופים עם אותה מסה. נניח שהכח המאלץ פועל על גוף 1. נרשום משוואת כוחות על שני הגופים בנפרד:

$$\begin{aligned} x_1: \qquad m\ddot{x}_1 &= f_0 \sin\omega t - k(x_1 - x_2 - l_0) \\ x_2: \qquad m\ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2 - l_0) \end{aligned}$$

כאשר l_0 הוא האורך הרפוי של הקפיץ ו-$l = x_1 - x_2$ המרחק בין מיקומי 2 המסות הוא האורך של הקפיץ l. נעשה החלפת משתנים:

$$\begin{aligned} \tilde{l} &\equiv x_1 - x_2 - l_0 \\ \dot{\tilde{l}} &= \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ \ddot{\tilde{l}} &= \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 \end{aligned}$$

כעת, נחסיר את משוואת הכוחות על x_2 ממשוואת הכוחות על x_1:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= f_0 \sin\omega t - 2k(x_1 - x_2 - l_0) \\ m\ddot{\tilde{l}} &= f_0 \sin\omega t - 2k\tilde{l} \end{aligned}$$

$$\ddot{\tilde{l}} + \frac{2k}{m}\tilde{l} = \frac{f_0}{m}\sin\omega t$$

הפתרון הוא מהצורה:

$$\tilde{l}(t) = \frac{f_0}{\sqrt{m^2\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)^2}}\sin\omega t = \pm\frac{f_0}{m\omega^2 - 2k}\sin\omega t$$

ההתארכות המירבית של הקפיץ ה\tfel\| x^2-y^2 \thgir\|יא המשרע

$$\tilde{l}_{max} = (l - l_0)_{max} = \left|\frac{f_0}{m\omega^2 - 2k}\right|$$