תרגול #10 ־ מומנט אינרציה ומומנט כח

28 במאי 2013

רקע תיאורטי

מומנט אינרציה I

- עבור גוף יחיד ונקודתי המבצע סיבוב, האנרגיה הקינטית ניתנת על ידי: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$.
כאשר מדובר על מספר גופים הנעים סביב ציר משותף באותה מהירות זויתית ω, האנרגיה הקינטית פשוט תהיה הסכום:=

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_i^n m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

I הוא מומנט האינרציה ועבור מספר גופים הוא מוגדר כ: $I = \sum_i^n m_i r_i^2$, כאשר r_i הוא מרחק הגוף i מציר הסיבוב.
כאשר מדובר בהתפלגות רציפה (כגון: מוט, דיסקה, מלבן או כל צורה שהיא), מומנט ההתמד מוגדר כך:

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \int r^2 \rho dV \\ &= \int r^2 \sigma ds \\ &= \int r^2 \lambda dl \end{aligned}$$

- dm ־ אלמנט מסה
- ρ־ צפיפות מסה נפחית
- σ־ צפיפות מסה משטחית
- λ־ צפיפות מסה אורכית

מומנט כח τ

נקרא גם מומנט סיבוב והוא למעשה יכולתו של כח לגרום לסיבובו של גוף עליו הוא פועל. יכולת זו תלויה בגודל הכח, כיוונו וגם במיקומה של נקודת האחיזה של הכח. מומנט הסיבוב הוא מכפלה וקטורית בין הכח הפועל ובין זרוע.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin \theta$$

- $\vec{F}$ - וקטור הכח הפועל בנקודה כלשהי על הזרוע
- $\vec{r}$ - וקטור המרחק בין ציר הסיבוב של הגוף לבין נקודת הפעלת הכח
- θ - הזוית בין הכח לבין הזרוע

למעשה, מכיוון שזו מכפלה וקטורית, רק רכיב הכח אשר מאונך לזרוע תורם לתנועה סיבובית.

שיווי משקל מכני

על מנת שגוף יהיה בשיווי משקל מכני צריך להתקיים ששקול הכוחות בכל נקודה עליו יהא שווה לאפס:

$$\sum \vec{F} = 0$$

אולם כעת, בנוסף, צריך להתקיים ששקול המומנטים בכל נקודה על הגוף אף הוא יהא שווה לאפס:

$$\sum \vec{\tau} = 0$$

שאלה 1_6208 - מוט עם ציר סיבוב מוטה בזוית

חשבו את מומנט ההתמד לסיבוב של מוט דק ואחיד במסה M ובאורך L סביב ציר העובר במרכזו והנטוי בזוית α ביחס אליו.

פתרון

מדובר בהתפלגות רציפה עם צפיפות מסה אורכית $\lambda = \frac{M}{L}$. אלמנט מסה קטן ניתן על ידי $dm = \lambda dr$. כל אלמנט מסה נמצא במרחק $r_\perp = r\sin\alpha$ מציר הסיבוב ולכן:ˆˆ

$$I = \int_{r_{min}}^{r_{max}} r_\perp^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \sin^2\alpha \lambda dr = \lambda \sin^2\alpha \frac{r^3}{3}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \lambda \sin^2\alpha \frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{4}\right)$$

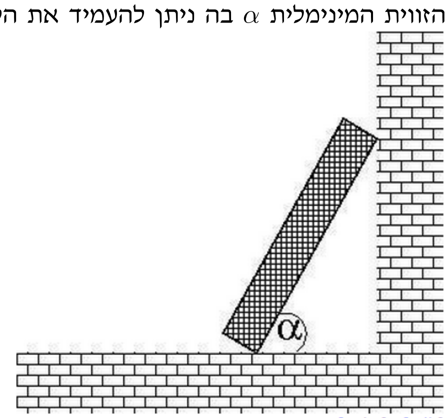
$$I = \frac{ML^2}{12}\sin^2\alpha$$

למעשה, התיקון במומנט ההתמד של מוט הנוטה בזווית ביחס לציר הסיבוב הוא פקטור של $\sin^2\alpha$ ביחס למומנט ההתמד של מוט לאורכו של הציר.

שאלה 1_6301 - סולם מחליק

סולם שמסתו m ואורכו L נשען על קיר אנכי חסר חיכוך. מקדם החיכוך בין הסולם לרצפה הוא μ.

מהי הזווית המינימלית α בה ניתן להעמיד את הסולם בשיווי משקל?



פתרון

כיוון שאנו דורשים שיווי משקל, אזי סכום הכוחות על הסולם צריך להתאפס על מנת שהגוף לא יאיץ קווית ובנוסף, סכום המומנטים אף הוא יתאפס על מנת שהגוף לא יאיץ סיבובית. נסמן:

- N_1 - הנורמל עם הקיר
- N_2 - הנורמל עם הרצפה
- f - החיכוך אשר פועל בנקודת המגע עם הרצפה בכיוון ימינה

נתחיל עם משוואת הכוחות:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= f - N_1 = 0\\ \sum F_y &= N_2 - mg = 0\end{aligned}$$

נוסיף את משוואת מומנטי הכח. ניתן לבחור כל נקודה ונרצה לקחת כנקודת ציר את הפינה השמאלית של הסולם:

$$\begin{aligned}\sum \tau &= mg\frac{L}{2}\sin\left(90^\circ - \alpha\right) - N_1 L \sin\alpha\\ &= \frac{1}{2}mgL\cos\alpha - N_1 L\sin\alpha = 0\\ \Rightarrow \quad & mg = 2N_1\tan\alpha\end{aligned}$$

נשתמש ב- $mg = N_2$ ממשוואת הכוחות על ציר y ובנוסף ב- $N_1 = f \leq \mu N_2$ ממשוואת הכוחות על ציר x. נציב במשוואת המומנטים ונקבל:

$$\begin{aligned}N_1 &\leq \mu N_2 = 2\mu N_1 \tan\alpha\\ \frac{1}{2\mu} &\leq \tan\alpha\\ \alpha &\geq \arctan\frac{1}{2\mu}\end{aligned}$$

וקיבלנו תנאי מינימלי לזווית α כך שהסולם לא יחליק.