תנועה מעגלית זקופה

על מנת שהגוף יבצע תנועה מעגלית זקופה, נדרוש שהחוט יהיה מתוח בכל עת ($T \geq 0$). הנקודה הקריטית ביותר היא כשהגוף בשיא הגובה. מהירותו שם היא v_0. לכן, תאוצתו הרדיאלית לכיוון מרכז המעגל היא $\frac{v_0^2}{l}$. נרשום את משוואת החוק השני של ניוטון עבור הנקודה הכי גבוהה:

$$T + mg = m\frac{v_0^2}{l}$$
$$m\frac{v_0^2}{l} - mg = T \geq 0$$
$$v_0 \geq \sqrt{gl}$$

מעניקים לכדור $v_0 = 2\sqrt{gl}$. אנחנו יודעים על פי הסעיף הראשון שהגוף אכן יבצע תנועה מעגלית זקופה. אפשר למצוא את מהירות הגוף בכל זווית בעזרת משוואת שימור האנרגיה. נקבע את האפס במרכז המעגל, ונקבל:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl\cos\theta$$
$$v^2 = v_0^2 + 2gl(1-\cos\theta) = 4gl + 2gl - 2gl\cos\theta = 2gl(3-\cos\theta)$$

אז יש לנו גוף שנע בתנועה מעגלית, ואנחנו יודעים את מהירותו בכל עת. על מנת לקבל את המתיחות בחוט, נרשום את משוואות החוק השני עבור הציר הרדיאלי :

$$T + mg\cos\theta = ma_r = m\frac{v^2}{l}$$
$$T = m\frac{v^2}{l} - mg\cos\theta = mg(6-2\cos\theta) - mg\cos\theta = mg(6-3\cos\theta)$$

אומרים לנו שהחוט יקרע בT_{max}. כלומר ב:

$$T = mg(6-3\cos\theta) = T_{max}$$
$$6mg - T_{max} = 3mg\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{6}{3} - \frac{T_{max}}{3mg} = 2 - \frac{3.6}{3} = 0.8$$

את המהירות כפונקציה של הזווית כבר מצאנו מזמן, רק נציב את הזווית שחישבנו:

$$v_1 = \sqrt{gl(6-2\cos\theta)} = \sqrt{4.4gl}$$

לסעיף האחרון אנחנו צריכים את הרכיב האנכי של המהירות, ואת גובה הגוף ברגע הניתוק. יש לנו את גודל המהירות ואת הזווית, ולכן הכל ידוע. גובה הנתק (ביחס ל0 שקבעתי במרכז המעגל) הוא:

$$y_1 = l\cos\theta = 0.8l$$

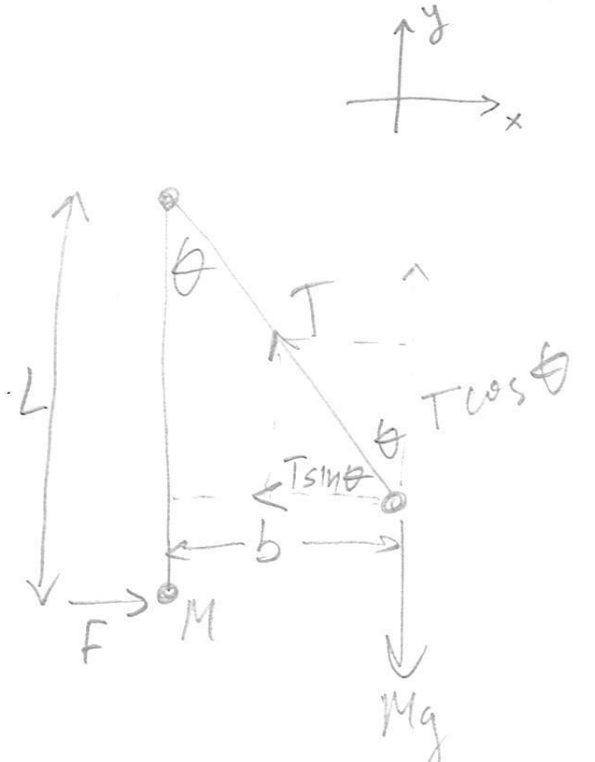
ורכיב הy של המהירות:

$$v_{1y} = -v_1\sin\theta = -v_1\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{4.4gl}\sqrt{0.36} = -\sqrt{1.58gl}$$

נותר רק לרשום את משוואות התנועה של הגוף:

$$y = y_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$$
$$-3l = 0.8l - \sqrt{1.58gl}t - g\frac{t^2}{2}$$
$$\frac{g}{2}t^2 + \sqrt{1.58gl}t - 3.8l = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-\sqrt{1.58gl} \pm \sqrt{1.58gl + 4 \cdot 3.8l \cdot \frac{g}{2}}}{g}$$
$$t_+ \approx 0.56s$$

הזמן החיובי הוא הזמן הרלוונטי בבעיה שלנו.



א. מציבים את התיבה במרחק d ע"י מפעילים כח כך שבמרחק d התיבה לא תזוז
לכן נדרוש ש- $x=d$

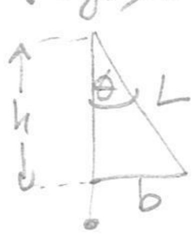
$$\sum F=0$$

$$\begin{cases} T\cos\theta = Mg \\ F - T\sin\theta = 0 \end{cases}$$

פותרים מערכת משוואות כאשר T, F נעלמים שצריך למצוא.

$$T=\frac{Mg}{\cos\theta} \Rightarrow F = Mg\,tg\theta$$

נמצא את $tg\theta$:



$$h=\sqrt{L^2-b^2} \Rightarrow tg\theta=\frac{b}{h}=\frac{b}{\sqrt{L^2-b^2}}$$

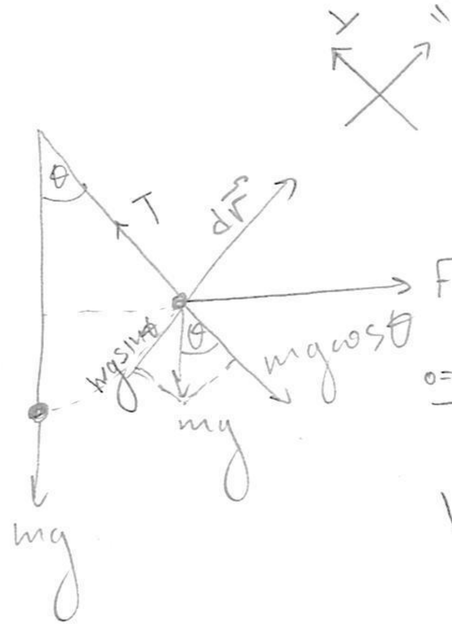
$$\vec{F}_{x=b}=Mg\frac{b}{\sqrt{L^2-b^2}}\hat{x} = 415\hat{x}\ [N]$$

ב. מהירות התיבה בתחילת ההזזה ובסוף שווה ל-0

$$W=\int \vec{F}d\vec{r} = \Delta E_k = 0$$

העבודה הכוללת: $W=0$.

ג).



$$F_\parallel = ma_\parallel = -mg\sin\theta$$

$$F_\perp = ma_\perp = T - mg\cos\theta$$

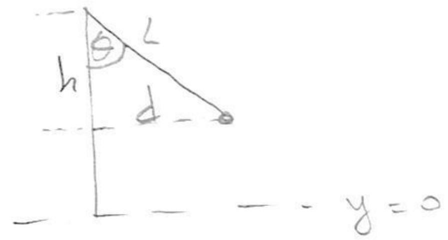
ניקח רק את $F_\parallel$ כי $\vec F_\perp \perp d\vec r \Leftarrow \underline{0=\vec F_\perp d\vec r}$

$$W = \int \vec F d\vec r = \int_0^\theta -mg\sin\theta \, R \, d\theta$$

$$= -mgR\cos\theta \Big|_0^\theta = mgR(1-\cos\theta)$$

$$\sin\theta = \frac{d}{L} \quad , \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{d^2}{L^2}}$$



$$W = mgR\left(1 - \frac{\sqrt{L^2-d^2}}{L}\right) \sim -815[J]$$

ד). הכוח שפועל בגלל החבל הוא מתיחות ובגלל שהיא תמיד מאונך לכיוון התנועה העבודה תהיה 0.

ה). העבודה הכוללת היא סכום כל העבודות בבעיה והיא שווה ל-0

$$\sum W = 0$$

$$W_{כוח} + W_{כבידה} + \cancel{W_{חבל}}^{\,0} = \sum W = 0 \Rightarrow W_{כוח} = -W_{כבידה} = -(-815) = 815[J]$$

1). היות F לא קבוע לכל θ ולכן לא ניתן להוציא אותו מהאינטגרל

$$F(\theta) \neq const$$

$$W \neq F\int dl = F\int R\,d\theta$$

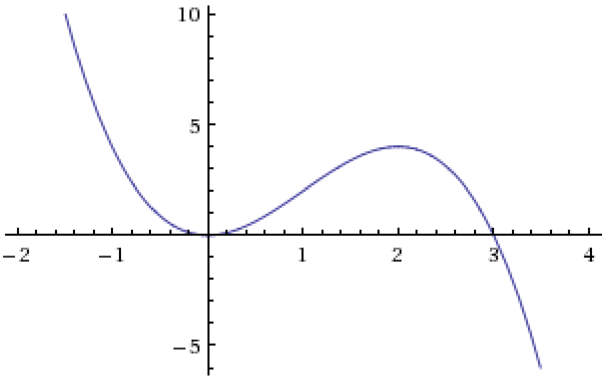
השאלה:

חלקיק במסה m נע תחת השפעת פוטנציאל מהצורה $U(x)=3x^2-x^3\,[J]$

א) שרטטו גרף של הפוטנציאל כפונקציה של x
ב) מצאו את הכח הפועל על החלקיק, שרטטו גרף של הכח כפונקציה שלx
ג) מצאו את נקודות שיווי המשקל, האם הם יציבות?
ד)תארו את תנועת החלקיק במקרים הבאים:
1)האנרגיה הכוללת היא 2 Jוהחלקיק נמצא בראשית.
2)האנרגיה הכוללת היא 5 Jוהחלקיק נמצא בראשית.
3)האנרגיה הכוללת היא 1 Jוהחלקיק נמצא במרחק 3 מטר מהראשית.

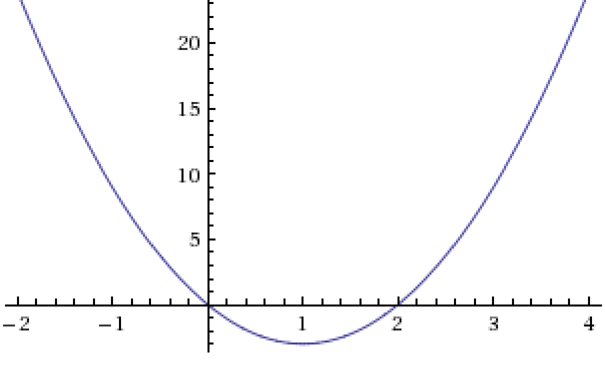
הפתרון:

א) מתוך וולפראם אלפא (http://www.wolframalpha.com/input/?i=Plot%5B3+x%5E2+-+x%5E3%2C+%7Bx%2C+-2%2C+4%7D%5D)



ב) הכוח הוא מינוס נגזרת הפוטנציאל: $F(x)=-\frac{dU(x)}{dx}=-6x+3x^2\,[N]$

מתוך וולפראם אלפא: (http://www.wolframalpha.com/input/?i=Plot%5B-1*D%5B3+x%5E2+-+x%5E3%5D%2C+%7Bx%2C+-2%2C+4%7D%5D)



ג) נקודות ש"מ הן המקומות בהם הנגזרת (הכח) שווה ל-0: $-6x+3x^2=0 \rightarrow x_1=0;\ x_2=2$

ממראה פונקציית ניתן להבחין הנקודה X1 היא נקודת ש"מ יציב והנקודה X2 היא נקודת ש"מ לא יציב.

נאפיין את הנקודות גם באמצעות הנגזרת השנייה של הפוטנציאל

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=-6+6x \rightarrow \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x1}=-6\quad \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x2}=6$$

נמצא שאופי נקודות הקיצון זהה לזה שנמצא מתוך בחינת הפוטנציאל.

ד) האנרגיה הכוללת של החלקיק קבועה, כאשר החלקיק נע לאורך ציר ה-X אנרגיה קינטית מומרת לפוטנציאלית ולהפך. בכל מקום שבו האנרגיה המכנית שווה לאנרגיה הפוטנציאלית תימצא נקודת מפנה, המצב של חלקיק הנע בין נקודות מפנה מכונה "מצב קשור". אם באחד הכיוונים אין לחלקיק נקודת מפנה תנועתו תהיה חופשית בכיוון זה, המצב של חלקיק הנע בצורה זו מכונה "מצב לא קשור".

1) כאשר האנרגיה הכוללת היא $E_{mec}=2[J]$ והחלקיק ממוקם בראשית הוא חסום בין שתי נקודות ולכן תנועתו היא של "מצב קשור".

12) כאשר האנרגיה הכוללת היא $E_{mec}=5[J]$ והחלקיק ממוקם בראשית הוא לא חסום על ידי המחסום שמימין (גובהו רק $U(x)=4[J]$) ולכן תנועתו היא של "מצב לא קשור".

3) כאשר האנרגיה הכוללת היא $E_{mec}=5[J]$ והחלקיק ממוקם ב $x=3[m]$ הוא לא חסום ולכן תנועתו היא של "מצב לא קשור".

1-4111

מסה m מאיצה באופן קבוע ממנוחה למהירות V_f בזמן t_f.

(א) הראה כי העבודה W הנעשית על המסה כפונקציה של הזמן היא

$$W = m\left[\frac{V_f}{t_f}\right]^2 \frac{t^2}{2}$$

(ב) מהו ההספק הרגעי כפונקציה של הזמן?

פתרון:

$$W = \int_0^x F\,dx \quad , \quad F = ma$$

$$= \int_0^x m a_x\,dx = \int_0^x m a_x\,dx\,\frac{dt}{dt} = m a_x \int_0^t \frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= m a_x \int_0^t v_x\,dt$$

[קבוע a]

$V = V_0 + at$

$$= m a_x \int_0^t [at]\,dt = m a_x^2 \frac{t^2}{2}$$

$$W = \frac{1}{2} m a^2 t^2$$

$$V_f = a t_f \rightarrow a = \frac{V_f}{t_f}$$

$$W = \frac{1}{2} m \left[\frac{V_f}{t_f}\right]^2 t^2 \quad //$$

ב) נגזור:

$$P = \frac{dW}{dt} = m\left[\frac{V_f}{t_f}\right]^2 t$$

גוף מחליק

נפתור את השאלה ע"י חישוב העבודה שנעשתה על הגוף, והשוואת עבודה זו להפרש האנרגיה הקינטית.
על הגוף פועלים שלושה כוחות: הכובד (mg), הנורמל (N), והחיכוך (f).
הנורמל תמיד ניצב לתנועה, ולכן לא מבצע עבודה.

1. בקטע המעגלי (A-B) כיוון כוח הכובד הוא כלפי מטה, והחלק הרלוונטי מכוח זה (המקביל לכיוון התנועה) הוא: $mg\cos\theta$
כיוון כוח החיכוך הוא תמיד נגד כיוון התנועה, וגודלו משתנה על פי הנוסחא שניתנה לנו בשאלה.
המסלול שלנו הוא לאורך קשת המעגל, ולכן : $ds = Rd\theta$
לסיכום, סך העבודה שנעשתה על הגוף בקטע המעגלי היא:

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (mg\cos\theta - \frac{b}{\pi^4}\theta^3) Rd\theta = \left(mg\sin\theta - \frac{b}{\pi^4}\frac{\theta^4}{4} \right) R \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = mgR - \frac{b}{\pi^4}\frac{\pi^4}{64} = mgR - \frac{b}{64}R$$

נשאלנו מה יהיה המקדם b כך שמהירות בנקודה B תהיה זהה למהירות בנקודה A, כלומר שסך העבודה שנעשתה על הגוף היא אפס. התשובה היא כש $b = 64mg$

2. בסעיף זה שואלים, עם המקדם b שמצאנו, מה יהיה המרחק B-C. למעשה, אם המקדם b הוא שמצאנו, אנחנו יודעים שלא התבצעה על הגוף עבודה בקטע המעגלי, ולכן מהירותו בנקודה B שווה למהירותו ההתחלתית v0 מהנקודה A!
אז השאלה היא מה המרחק שיעבור גוף עם מהירות התחלתית v0, כאשר פועל עליו חיכוך עם המקדם μ
מכיוון שהגוף מונח על השולחן, ולא מאיץ בכיוון האנכי, הנורמל שווה לכוח הכובד (N=mg). ולכן החיכוך הקינטי הוא:
$$f_k = \mu N = \mu mg$$
ורק החיכוך הקינטי עושה עבודה (הכובד והנורמל אנכים לתנועה). נחשב את העבודה לאורך קטע באורך L.
$$W = \int_0^L -\mu mg dx = -\mu mgL$$
עכשיו נוסיף את התנאי שהמהירות הסופית היא 0, ובעזרת משפט העבודה-אנרגיה :
$$m\frac{0^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = W = -\mu mgL$$
$$L = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$
וזו התשובה לשאלה. כדאי לבדוק שהיחידות מסתדרות.

קפיץ וחיכוך

בתנועה מA ל C פועלים כוחות הכובד, הנורמל, והחיכוך. הכובד משמר, הנורמל תמיד ניצב לתנועה ולכן אינו עושה עבודה, ואת עבודת החיכוך אנו יכולים לחשב. כוח החיכוך בקטע המדובר הוא:

$$f = \mu_k N$$

$$N - mg = 0$$

$$f = \mu_k mg$$

$$W = \int f dr = -\mu_k mgd$$

נסמן את גובה 0 במישור , ונשתמש במשפט עבודה אנרגיה:

$$\begin{aligned} K_i + U_i + W &= K_f + U_f \\ mgR - \mu_k mgd &= \frac{mv^2}{2} \\ v^2 &= 2g(R - \mu_k d) \end{aligned}$$

שימו לב שהמהירות בריבוע חייבת להיות חיובית, וזה נותן לנו תנאי לגבי האם בכלל הגוף יגיע לקפיץ.
הקפיץ מתכווץ בS, והשוואת האנרגיה מרגע הפגיעה בקפיץ ועד סיום ההתכווצות נותנת:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{kS^2}{2} \\ 2mg(R - \mu_k d) &= kS^2 \\ k &= \frac{2mg(R - \mu_k d)}{S^2} \end{aligned}$$

מכיוון שהחיכוך בהלוך ובחזור יעשה את אותה עבודה, ניתן פשוט לרשום את משפט העבודה-אנרגיה מתחילת התנועה ועד סופה:

$$\begin{aligned} mgR + W &= mgh \\ mgR - 2 \cdot \mu_k mgd &= mgh \\ h &= R - 2\mu_k d \end{aligned}$$

יש לשים לב ש$h > 0$. אם מקבלים גובה קטן מאפס, זה אומר שהגוף בכלל לא יסיים את התנועה, והחיכוך יעצור אותו בדרך.