Solution – The Seven Coins:

The moment of inertia is additive, hence we need to calculate the moment of inertia separately for each coin (around the required axis) and simply add.

Starting with the central coin:

$$I_{central} = \int r_{\perp}^2 dm = \left\{ \sigma = \frac{m}{\pi R^2} \right\} = \sigma \int_0^R r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} m R^2$$

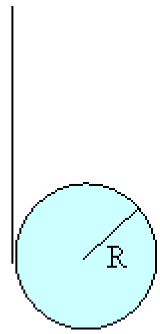
And then, using the perpendicular axes theorem for the other coins:

$$I_{outer} = \frac{1}{2} m R^2 + m(2R)^2$$

So finally-

$$I_{tot} = I_{central} + 6 I_{outer} = \frac{7}{2} m R^2 + 6m(2R)^2 = \boxed{\frac{55}{2} m R^2}$$

פתרון תרגיל 6409 1:



משוואת כוחות:

$$\sum F_y = ma = mg - T$$

משוואת מומנטים סביב מרכז המסה (נבחר את כיוון השעון ככיוון חיובי):

$$\sum \tau = I\alpha = TR$$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים, יחד עם הקשר $a = \alpha R$ הנובע מהעובדה שהיויו מתגלגל ללא החלקה ונקבל לבסוף:

$$\boxed{T = \frac{mgI}{I + mR^2} ; a = \frac{mgR^2}{I + mR^2}}$$

מסות על גלגלת

נרשום את משוואות התאוצה הקווית של שני הגופים:

$$M_2 a_2 = T_2 - M_2 g$$
$$M_1 a_1 = T_1 - M_1 g$$

בנוסף, יש לנו את את משוואת התנועה המעגלית:

$$I\alpha = T_2 r_2 - T_1 r_1$$

עכשיו נוסיף את תנאי חוסר ההחלקה:

$$a_1 = -\alpha r_1$$
$$a_2 = \alpha r_2$$

נבודד את הTים מהמשוואה הראשונה:

$$T_2 = M_2(a_2 + g) = M_2(\alpha r_2 + g)$$
$$T_1 = M_1(a_1 + g) = M_1(-\alpha r_1 + g)$$

ונציב במשוואת התנועה המעגלית:

$$I\alpha = T_2 r_2 - T_1 r_1 = M_2 r_2^2 \alpha + M_2 r_2 g + M_1 r_1^2 \alpha - M_1 r_1 g$$
$$(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2)\alpha = (M_2 r_2 - M_1 r_1) g$$

א. נשווה את אלפה לאפס ונקבל:

$$0 = (M_2 r_2 - M_1 r_1)$$
$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

כמובן שמשוואה זו היא פשוט השוואת סך המומנטים לאפס, וניתן היה להגיע אליה ישירות, אבל כבר חישבנו את אלפה באופן כללי אז למה לא להשתמש בזה.

ב. אם, ורק אם (ולא, זה לא מובן מאליו)

$$(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2) \neq 0$$

ניתן לחלק בגורם זה ולקבל :

$$\alpha = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)}{(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2)} g$$

והתאוצות הן:

$$a_1 = -\alpha r_1 = -\frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)}{(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2)} g r_1$$
$$a_2 = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)}{(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2)} g r_2$$

כאשר בכל האיזכורים שלו עד כאן I שווה ל:

$$I = \frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2}$$

ואל תבלבלו בבקשה בין m קטנה לM גדולה.

רצ'ט

קודם כל נתאר את כלל הכוחות בבעיה. על המוט פועלים:

- כוח הכובד ממרכז המוט כלפי מטה.
- הכוח שנובע מהציר המקובע למוט מימין למעלה. גודלו וכיוונו לא ידועים.
- כוח הנורמל בנקודה המגע עם הדיסקה, כלפי מעלה.
- כוח החיכוך עם הדיסקה. אם הדיסקה נעה ימינה, הוא פועל ימינה ולהפך.

על הדיסקה פועלים:

- כוח הכובד ממרכז הדיסקה.
- הכוח הנובע מהציר במרכז הדיסקה.
- כוח הנורמל בנקודת המגע עם המוט, כלפי מטה.
- כוח החיכוך בנקודת המגע עם המוט, פועל באופן מנוגד לחיכוך שפועל על המוט. אם הדיסקה נעה ימינה הוא פועל שמאלה ולהפך.

נוכל למצוא את גודל כוח החיכוך בעזרת חישובי מומנט על המוט בלבד. המוט לא זז ולא מסתובב, ולכן סכום הכוחות וגם סכום המומנטים עליו מתאפס. הכי נוח יהיה לחשב את המומנטים ביחס לציר הסיבוב, מכיוון שזה יחסוך לנו את הבירור לגבי הכוח שהציר עצמו מפעיל. זה משאיר שלושה כוחות שמפעילים מומנטים. נשים לפני כוח החיכוך סימן $\pm$, וכך נבצע את שתי האפשרויות במכה (שהחיכוך שמאלה או ימינה).

$$\begin{aligned}
\sum \tau &= 0 \\
\sum \tau &= Nl\sin\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta \pm fl\cos\theta = 0 \\
f &= \mu N \\
0 &= N - \frac{mg}{2} \pm \mu N\cot\theta = 0 \\
mg &= 2N\left(1 \pm \mu\cot\theta\right) \\
N &= \frac{mg}{2 \pm 2\mu\cot\theta} \\
f = \mu N &= \frac{\mu mg}{2 \pm 2\mu\cot\theta}
\end{aligned}$$

אחרי כל הסיפור הזה, יש לנו את גודל כוח החיכוך, עבור שתי האפשרויות (ימינה ושמאלה). נחשב את התאוצה הזוויתית של הדיסקה. אם נבחר כציר את ציר הסיבוב של הדיסקה, ישאר רק מומנט אחד. המומנט של הציר ושל הכובד מתאפסים מכיוון שמרחקם מהציר אפסי, והמומנט של הנורמל מתאפס מכיוון שהוא בכיוון הרדיאלי. רק החיכוך מפעיל מומנט. אם כך, משוואת התאוצה הזוויתית פשוטה למדי:

$$\begin{aligned}
\sum \tau &= I\alpha \\
\pm fR &= I\alpha \\
\alpha &= \pm\frac{fR}{I}
\end{aligned}$$

עכשיו אנחנו צריכים לשאול את עצמנו מה הקשר בין תאוצה לבין זמן העצירה. על פי הגדרה, השינוי במהירות הסיבובית הוא התאוצה הסיבובית, ובמקרה של תאוצה קבועה המהירות הזוויתית מקבלת ביטוי פשוט. בעזרתו ניתן להביע את זמן העצירה:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = 0$$
$$t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-\omega_0}{\pm\frac{fR}{I}}$$

בהנחה שהמהירויות ההתחלתיות שמאלה וימינה היו זהות (אבל עם סימנים מנוגדים), היחס הוא פשוט:

$$\frac{t_+}{t_-} = \frac{\frac{\omega_0}{\frac{f_+R}{I}}}{\frac{\omega_0}{\frac{f_-R}{I}}} = \frac{f_-}{f_+} =$$
$$= \frac{\frac{\mu mg}{2-2\mu\cot\theta}}{\frac{\mu mg}{2+2\mu\cot\theta}} = \frac{1+\mu\cot\theta}{1-\mu\cot\theta} = \frac{\tan\theta+\mu}{\tan\theta-\mu}$$

כשהפעולה האחרונה של המרת הקוטנגנס לטנגנס נעשתה רק כדי שמי שקיבל פתרון עם טנגנס ידע שגם הוא נכון.

התוצאה שקיבלנו חסרת יחידות, כנאה ליחסים. אופן הפתרון היה כזה: מצאנו את כוח החיכוך משיקולי סטטיקה של המוט, ואז חישבנו את השינוי בתאוצה של הגוף התחתון. השינוי בתאוצה הופכי לשינוי בזמן.