חוט ומסמר

הכוחות הפועלים על המסה הם רק הכובד והמתיחות. בבעיה שלפנינו המתיחות תמיד ניצבת לתנועה ולכן היא אינה עושה עבודה. אם כן, יש שימור אנרגיה מכנית. נקבע את גובה האפס ($h_0 = 0$) בנקודת ההתחלה של התנועה. האנרגיה בהתחלה היא:

$$E_i = K_i + U_i = 0$$

כשהחוט בזווית α, הגוף נמצא בגובה:

$$h_1 = \frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$

לכן האנרגיה המכנית בסוף היא:

$$E_f = K_f + U_f = \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$

כמו שאמרנו קודם לא נעשית עבודה אחרת ולכן האנרגיה נשמרת, ונקבל:

$$E_i = E_f$$
$$0 = \frac{mv_1^2}{2} + mg\frac{L}{2}(\cos\alpha - 1)$$
$$v_1^2 = gL(1 - \cos\alpha)$$

בסעיף הבא שואלים לגבי המתיחות. בחלק הזה של השאלה, התאוצה הרדיאלית צריכה להיות שווה ל:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{L/2} = 2\frac{v^2}{L}$$

הכוחות ברכיב הרדיאלי הם:

$$T + mg\cos\alpha$$

ולכן:

$$T + mg\cos\alpha = 2m\frac{v^2}{L}$$
$$\frac{T}{m} = 2\frac{v^2}{L} - g\cos\alpha = 2g(1 - \cos\alpha) - g\cos\alpha = g(2 - 3\cos\alpha)$$

כאשר הצבנו בדרך את המהירות בזווית תטא שמצאנו בפרק הקודם. מכאן אנחנו מקבלים שכשהמתיחות מתאפסת, הקוסינוס שווה $\frac{2}{3}$.

גוף נופל על קפיץ

עבודה בהגדרתה שווה ל $W=\int \vec{F}d\vec{r}$. במהלך הכיווץ, הכוחות הפועלים הם כוח הקפיץ כלפי מעלה, וכוח הכובד כלפי מעלה. נבחר מערכת צירים עם קואורדינטה y בכיוון מעלה, כאשר ראשיתה במישור הקפיץ הרפוי. עבודת הכובד היא:

$$W_g=\int_0^{-d}-mgdy=-mgy|_0^{-d}=mgd$$

עבודת כוח הקפיץ היא:

$$W_k=\int_0^{-d}k|y|dy=-\int_0^{-d}kdy=-\frac{ky^2}{2}|_0^{-d}=-\frac{kd^2}{2}$$

על מנת לקבל את מהירות המסה ברגע הפגיעה, נעזר בשיקולי אנרגיה. אנחנו יודעים את העבודה שנעשית על הגוף מרגע הפגיעה ועד עצירתו. לפי משפט עבודה - אנרגיה, זה ההפרש באנרגיה הקינטית. נסמן את מהירות הפגיעה ב v_0:

$$K_i+W=K_f$$
$$\frac{mv_0^2}{2}+mgd-\frac{kd^2}{2}=0$$
$$v_0^2=\frac{k}{m}d^2-2gd$$

העבודה שהכובד עושה מגובה h ועד הקפיץ, היא $W_g=mgh$. האנרגיה הקינטית בתחילה היא אפס, ובנקודת המפגש עם הקפיץ, היא לפי המהירות מהסעיף הקודם:

$$K_i+W=K_f$$
$$0+mgh=\frac{mv_0^2}{2}=\frac{kd^2}{2}-mgd$$
$$h=\frac{k}{2mg}d^2-d$$

בשביל הסעיף האחרון, קודם כל נביע את d באמצעות h:

$$\frac{k}{2mg}d^2-d-h=0$$
$$d_\pm=\frac{1\pm\sqrt{1+4h\frac{k}{2mg}}}{\frac{k}{mg}}=\frac{mg}{k}\left(1\pm\sqrt{1+4h\frac{k}{2mg}}\right)$$

הפתרון הרלוונטי הוא זה עם סימן הפלוס. אם נכפיל את h נקבל:

$$\tilde{d}=\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+2\cdot 4h\frac{k}{2mg}}\right)=\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+2\cdot 4\frac{k}{2mg}\left(\frac{k}{2mg}d^2-d\right)}\right)$$

סטפר בחדר כושר

זה תרגיל פשוט בהמרת יחידות. נתון שבפרוסת הלחם יש 250 קק"ל:

$$E_{bread} = 250k \cdot cal = 250000cal = 250000cal\frac{4.2J}{1cal} = 1050000J \approx 1MJ$$

אם ברצוננו להמיר 50 אחוז מזה לאנרגית גובה, נצטרך לעלות:

$$mgh = 0.5 \cdot E_0$$

$$h = \frac{0.5 \cdot E_0}{mg}$$

כל אחד יקבל פתרון שונה, אבל נניח שמסת האדם הממוצע היא כ $75kg$ ונקבל:

$$h \approx \frac{0.5MJ}{75kg \cdot 10\frac{m}{s^2}} = \frac{0.5MJ}{750N} = 666m$$

תנועה מעגלית זקופה

על מנת שהגוף יבצע תנועה מעגלית זקופה, נדרוש שהחוט יהיה מתוח בכל עת ($T \geq 0$). הנקודה הקריטית ביותר היא כשהגוף בשיא הגובה. מהירותו שם היא v_0. לכן, תאוצתו הרדיאלית לכיוון מרכז המעגל היא $\frac{v_0^2}{l}$. נרשום את משוואת החוק השני של ניוטון עבור הנקודה הכי גבוהה:

$$T + mg = m\frac{v_0^2}{l}$$
$$m\frac{v_0^2}{l} - mg = T \geq 0$$
$$v_0 \geq \sqrt{gl}$$

מעניקים לכדור $v_0 = 2\sqrt{gl}$. אנחנו יודעים על פי הסעיף הראשון שהגוף אכן יבצע תנועה מעגלית זקופה. אפשר למצוא את מהירות הגוף בכל זווית בעזרת משוואת שימור האנרגיה. נקבע את האפס במרכז המעגל, ונקבל:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl\cos\theta$$
$$v^2 = v_0^2 + 2gl(1-\cos\theta) = 4gl + 2gl - 2gl\cos\theta = 2gl(3-\cos\theta)$$

אז יש לנו גוף שנע בתנועה מעגלית, ואנחנו יודעים את מהירותו בכל עת. על מנת לקבל את המתיחות בחוט, נרשום את משוואות החוק השני עבור הציר הרדיאלי :

$$T + mg\cos\theta = ma_r = m\frac{v^2}{l}$$
$$T = m\frac{v^2}{l} - mg\cos\theta = mg(6-2\cos\theta) - mg\cos\theta = mg(6-3\cos\theta)$$

אומרים לנו שהחוט יקרע בT_{max}. כלומר ב:

$$T = mg(6-3\cos\theta) = T_{max}$$
$$6mg - T_{max} = 3mg\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{6}{3} - \frac{T_{max}}{3mg} = 2 - \frac{3.6}{3} = 0.8$$

את המהירות כפונקציה של הזווית כבר מצאנו מזמן, רק נציב את הזווית שחישבנו:

$$v_1 = \sqrt{gl(6-2\cos\theta)} = \sqrt{4.4gl}$$

לסעיף האחרון אנחנו צריכים את הרכיב האנכי של המהירות, ואת גובה הגוף ברגע הניתוק. יש לנו את גודל המהירות ואת הזווית, ולכן הכל ידוע. גובה הנתק (ביחס ל0 שקבעתי במרכז המעגל) הוא:

$$y_1 = l\cos\theta = 0.8l$$

ורכיב הy של המהירות:

$$v_{1y} = -v_1\sin\theta = -v_1\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{4.4gl}\sqrt{0.36} = -\sqrt{1.58gl}$$

נותר רק לרשום את משוואות התנועה של הגוף:

$$y = y_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$$
$$-3l = 0.8l - \sqrt{1.58gl}t - g\frac{t^2}{2}$$
$$\frac{g}{2}t^2 + \sqrt{1.58gl}t - 3.8l = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-\sqrt{1.58gl} \pm \sqrt{1.58gl + 4 \cdot 3.8l \cdot \frac{g}{2}}}{g}$$
$$t_+ \approx 0.56s$$

הזמן החיובי הוא הזמן הרלוונטי בבעיה שלנו.

קפיץ וחיכוך

בתנועה מA ל C פועלים כוחות הכובד, הנורמל, והחיכוך. הכובד משמר, הנורמל תמיד ניצב לתנועה ולכן אינו עושה עבודה, ואת עבודת החיכוך אנו יכולים לחשב. כוח החיכוך בקטע המדובר הוא:

$$f = \mu_k N$$

$$N - mg = 0$$

$$f = \mu_k mg$$

$$W = \int f dr = -\mu_k mgd$$

נסמן את גובה 0 במישור , ונשתמש במשפט עבודה אנרגיה:

$$\begin{aligned} K_i + U_i + W &= K_f + U_f \\ mgR - \mu_k mgd &= \frac{mv^2}{2} \\ v^2 &= 2g(R - \mu_k d) \end{aligned}$$

שימו לב שהמהירות בריבוע חייבת להיות חיובית, וזה נותן לנו תנאי לגבי האם בכלל הגוף יגיע לקפיץ.
הקפיץ מתכווץ בS, והשוואת האנרגיה מרגע הפגיעה בקפיץ ועד סיום ההתכווצות נותנת:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{kS^2}{2} \\ 2mg(R - \mu_k d) &= kS^2 \\ k &= \frac{2mg(R - \mu_k d)}{S^2} \end{aligned}$$

מכיוון שהחיכוך בהלוך ובחזור יעשה את אותה עבודה, ניתן פשוט לרשום את משפט העבודה-אנרגיה מתחילת התנועה ועד סופה:

$$\begin{aligned} mgR + W &= mgh \\ mgR - 2 \cdot \mu_k mgd &= mgh \\ h &= R - 2\mu_k d \end{aligned}$$

יש לשים לב ש$h > 0$. אם מקבלים גובה קטן מאפס, זה אומר שהגוף בכלל לא יסיים את התנועה, והחיכוך יעצור אותו בדרך.