1. הזית נמצא במנוחה במערכת הצירים המואצת של הפחית. במערכת זו פועל על הזית כוח מדומה ימינה. נגדיר את מערכת הצירים y למעלה ו x שמאלה, ונפרק את הנורמל לצירים אלו.
משוואות הכוחות על הזית בצירים השונים:
$$\begin{cases} X\ : N\sin\theta - mA = 0 \\ Y\ : N\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X\ : N\sin\theta = mA \\ Y\ : N\cos\theta = mg \end{cases}$$
נחלק את המשוואה העליונה בתחתונה ונקבל:
$$\tan\theta = \frac{A}{g}$$
כשהתאוצה היא 0, הזית מונח בתחתית הפחית, וככל שהתאוצה גדלה, כך הזווית גדלה.
2. במערכת של צופה מן הצד, הזית יגיע למצב שבו הוא מאיץ באותה תאוצה כמו הפחית. עם אותם כיוונים לx וy, נקבל:
$$\begin{cases} X\ : N\sin\theta = mA \\ Y\ : N\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X\ : N\sin\theta = mA \\ Y\ : N\cos\theta = mg \end{cases}$$
ואלו כמובן אותן משוואות שיובילו לאותה התוצאה.

משולש וריבוע

מכיוון ששואלים על תנועה יחסית בין המסות, נעבור למערכת המנוחה של המסה הגדולה (מערכת לא אינרציאלית!). נסמן x ימינה ו y למעלה.

במערכת זו, משוואות החוק השני של ניוטון, כשכבר נציב את העובדה שהתאוצה 0, אבל נוסיף חיכוך, הן:

$$f\cos\alpha + N_1\sin\alpha - M_1 A = 0 \quad (1)$$

$$-f\sin\alpha - M_1 g + N_1\cos\alpha = 0 \quad (2)$$

$$F - N_1\sin\alpha - f\cos\alpha - M_2 A = 0 \quad (3)$$

$$N_2 - M_2 g - N_1\cos\alpha + f\sin\alpha = 0 \quad (4)$$

בקשר לחיכוך, פשוט קבעתי כיוון באופן שרירותי, ובפתרון עצמו אתייחס לשתי האפשרויות: שצדקתי בבחירתי וסימן החיכוך יהיה חיובי, או שטעיתי וסימן החיכוך שלילי. מה שחשוב לשים לב אליו זו העקביות בבחירה מבחינת הצירים ומבחינת הגופים. על פי החוק השלישי של ניוטון, אנו יודעים שאם פועל על גוף כוח, פועל כוח מנוגד על גוף אחר. לכן אם מופיע בגוף הראשון למשל $f\sin\alpha$, אז בשני יופיע מינוס של אותו דבר. כנ"ל כמובן ברכיבים השונים של הנורמל.

משוואה 4 רק מוסיפה עוד נעלם לא דרוש (N_2), ולכן נתעלם ממנה.

בסעיף א', החיכוך הוא אפס, ולכן נציב $f = 0$. נחבר את משוואות ציר הx , כלומר 1 + 3 ונקבל:

$$F = (M_1 + M_2)A$$

נסדר את 2 מחדש לקבל:

$$N_1 = \frac{M_1 g}{\cos\alpha}$$

ונציב את זה ב1:

$$M_1 A = \frac{M_1 g}{\cos\alpha}\sin\alpha = M_1 g\tan\alpha$$

הצבה של המשוואה הקושרת בין הכוח לתאוצה נותנת:

$$F = (M_1 + M_2)g\tan\alpha$$

בסעיף ב', רוצים את הכוח המינימלי והמקסימלי. זה קורה כאשר החיכוך או הכי ימינה או הכי שמאלה, כלומר או פלוס או מינוס $\mu_s N$. נפתור במכה את שתי האפשרויות על ידי שימוש ב $f = \pm\mu_s N_1$.

נמצא את N_1. בעזרת נוסחא 2.

$$\mp\mu_s N_1\sin\alpha - M_1 g + N_1\cos\alpha = 0$$

$$(\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha)N_1 = M_1 g$$

$$N_1 = \frac{M_1 g}{\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha}$$

נציב ב1:

$$M_1 A = f\cos\alpha + N_1\sin\alpha = N_1(\pm\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{M_1 g(\pm\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha}$$

$$F = A(M_1 + M_2) = g(M_1 + M_2)\frac{(\pm\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha} = g(M_1 + M_2)\frac{(\sin\alpha \pm \mu_s\cos\alpha)}{\cos\alpha \mp \mu_s\sin\alpha}$$

$$F = g(M_1 + M_2)\frac{(\tan\alpha \pm \mu_s)}{1 \mp \mu_s\tan\alpha}$$

מהירות סופית

נכתוב מערכת צירים עם ציר x אשר מצביע כלפי מטה. משוואת החוק השני של ניוטון על הגוף היא:

$$ma = mg - bv^2$$

א. כאשר הכדור נמצא במהירותו הסופית, מהירותו קבועה (שכן אחרת לא ניתן היה לקרוא למהירות זו סופית). אם המהירות קבועה, התאוצה היא 0, ולכן:

$$ma = 0 = mg - bv_t^2$$
$$bv_t^2 = mg$$
$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

ב. כדי למצוא את התאוצה פשוט צריך להציב חצי מהמהירות התחילית (בשימת לב לסימן. הגוף נע מעלה, לכן מהירותו שלילית במערכת שבחרנו).

$$a = g + \frac{bv^2}{m} = g + b\frac{g}{4b} = \frac{5}{4}g$$

כלומר התאוצה היא פעם ורבע תאוצת הכובד כלפי מטה. כעיקרון, בדרך מעלה, התאוצה הייתה גדולה מאוד בתחילת התנועה ($2g$) ולאט לאט הלכה וקטנה.

ג. עכשיו הסימן בסדר, ופשוט נציב:

$$a = g - \frac{bv^2}{m} = g - b\frac{g}{4b} = \frac{3}{4}g$$

והמסקנה היא שהתאוצה ממשיכה לקטון בגודלה, עד אשר היא נהיית 0, וזה אומר שהגוף הגיע למהירות הסופית.

כוח תלוי זמן

התרגילים של כוח תלוי זמן הם בעצם תרגילי תאוצה תלוית זמן במסווה. תרגילי תאוצה תלוית זמן למדנו בתרגול הראשון.

תאוצת הגוף היא:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m}\sin^2(\omega t) = \frac{F_0}{2m}(1-\cos(2\omega t))$$

נתחיל מלמצוא את מהירות הגוף:

$$v = \int a dt = \int \frac{F_0}{2m}\left(1-\cos(2\omega t)\right)dt = \frac{F_0}{2m}\left(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right) + C_1$$

על מנת למצוא את הקבוע, נציב תנאי שפה, כלומר מהירות בזמן $t = 0$ שווה ל0. מזה נקבל:

$$C_1 = 0$$

$$v = \frac{F_0}{2m}\left(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right)$$

עכשיו נמצא את המיקום:

$$x = \int v dt = \int \frac{F_0}{2m}\left(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right)dt = \frac{F_0}{2m}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4\omega^2}\cos(2\omega t)\right) + C_2$$

ועכשיו יש לשים לב, שבשאלה זו, על אף שהמיקום ההתחלתי הוא 0, הקבוע שקיבלנו באינטגרל אינו אפס.

$$x(t=0) = 0 = \frac{F_0}{2m}\frac{1}{4\omega^2}\cos(0) + C_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{F_0}{2m}\frac{1}{4\omega^2}$$

ונציב חזרה לקבלת המשוואה הסופית:

$$x(t) = \frac{F_0}{4m}\left(t^2 + \frac{1}{2\omega^2}\cos(2\omega t) - \frac{1}{2\omega^2}\right)$$