בין הקפיץ לקפיץ

גוף מחובר לקפיצים זהים $(k = 200N/M)$ משני צידיו. הגוף מוסט שמאלה מרחק $x_1 = 20cm$ ומשוחרר.

את תדירות תנועתו נקבל מהמשוואה על התאוצה:

$$ma = \sum F = -kx - kx$$
$$a = -\frac{2k}{m}x$$

לכן אנו רואים שהתנועה ההרמונית היא עם תדירות:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

האנרגיה במהלך התנועה נשמרת, ולכן ניתן לחשב אותה בכל שלב. השלב הנוח יהיה בדיוק כשהגוף משוחרר, כך שהמהירות 0 ומיקומו x_1:

$$E = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = kx_1^2 = 200\frac{N}{m} \cdot (0.2m)^2 = 200 \cdot 0.04N \cdot m = 8J$$

את המיקום כפונקציה של הזמן נקבל מתוך ידיעתנו את משוואות התנועה בתנועה הרמונית:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$x(0) = x_1$$
$$v(0) = 0$$
$$A = x_1$$
$$\varphi = 0$$
$$x(t) = x_1\cos(\omega t)$$

הגוף יגיע לנקודה הנמצאת $5cm$ מימין לנקודת שיווי המשקל כש:

$$x(t) = -5cm$$
$$x(t) = x_1\cos(\omega t) = -5cm$$
$$\cos(\omega t) = -\frac{5cm}{x_1}$$
$$t = \frac{1}{\omega}\arccos(-\frac{5cm}{20cm})$$
$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}}\arccos(-1/4) \approx \sqrt{\frac{1kg}{400N/m}}1.82 \approx 0.09s$$

שני קפיצים ושתי מסות

ישנם שני קפיצים זהים

$$k_A = k_B = 500N/M$$

שמחוברים למסות

$$m_A = m_B = 1kg$$

בשלב הראשון מזיזים רק את A, ואז יש לנו תנועה הרמונית של גוף בודד על קפיץ בודד עם זמן התדירות הידועה

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k_A}{m_A}} = \sqrt{\frac{500N/m}{1kg}} = \sqrt{500}\frac{1}{s}$$

הגוף מוזז שמאלה ל $x_0 = 10cm$ ומשוחרר. הוא מספיק להגיע מהקצה חזרה לנקודת הריפיון של הקפיץ עד שהוא מתנגש בB. זה בעצם רבע מתנועתו המלאה, ולכן לוקח לו רבע זמן מחזור עד שהוא נפגש עם B:

$$t_{AB} = \frac{T_A}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{500}\frac{1}{s}} \approx 0.07s$$

ואין בכלל תלות בכמה רחוק הוא הוסט שמאלה.

את המהירות בזמן הפגיעה ניתן לחשב בשני אופנים. או בעזרת שימור האנרגיה:

$$\frac{k_A x_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2}$$

או, בעזרת הידיעה שבתנועה הרמונית המהירות המקסימלית שווה לתדירות כפול המשרעת . (תגזרו את הביטוי למיקום בתנועה הרמונית כדי להבין מאיפה זה מגיע).

$$v_A = \omega x_0 = \sqrt{500}\frac{1}{s}0.1m = \sqrt{5}\frac{m}{s}$$

עכשיו הגופים מתנגשים אלסטית. כדי לחשב את המהירות של הגוף המשותף נשתמש בשימור תנע (שקיים רק ברגע ההתנגשות):

$$mv_A = 2mu$$

$$u = \frac{1}{2}v_a = \frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{m}{s}$$

עכשיו יש לנו תרגיל חדש בעצם, עם מסה כפולה ושני קפיצים, שדומה מאוד לתרגיל 1_5100. תדירות התנועה היא:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{2m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{500}\frac{1}{s}$$

שזו בעצם בדיוק התדירות שהייתה קודם.

מהפגיעה עד לנקודה שבה יעצרו שתי המסות חולף רבע זמן מחזור, אותו כבר מצאנו בסעיף קודם:

$$\frac{T}{4} \approx 0.07s$$

זמן המחזור גם הוא פשוט:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{500}}s$$

סוף סוף בסעיף ד צריך את המשרעת. נמצא אותה מתנאי ההתחלה (המהירות כשהגופים ב$x = 0$). משוואות המיקום, וכנגזרת המהירות הן:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) \\
v(t) &= -\omega A\cos(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$

כדי לקיים את תנאי ההתחלה מיקום אפס, ומהירות ידועה, נבחר $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, והמשרעת:

$$A = \frac{u}{\omega} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{m}{s}}{\sqrt{500}\frac{1}{s}} = \frac{1}{20}m = 0.05m$$

$$x(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin(\omega t)$$

רוצים $1cm$ ימינה:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 0.01m = x_2 \\
A\sin(\omega t) &= x_2 \\
t &= \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{x_2}{A}\right) = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{0.01m}{0.05m}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{500}\frac{1}{s}}\arcsin(0.2) \approx 0.09s
\end{aligned}
$$

בסעיף האחרון מבקשים את המשרעת אותה כבר היינו צריכים למצוא:

$$A = 0.05m$$

מיקומו של גוף מתנודד

נתון לנו ביטוי למיקום גוף:

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega t)$$

ביטויים למהירות ולתאוצה נקבל מגזירה:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A\sin(\omega t)$$
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t)$$

נתנו לנו אחרי זמן $t_1 = T/6$ את המיקום המהירות והתאוצה:

$$x_1 = 6m$$
$$v_1 = -2\sqrt{3}\frac{m}{s}$$
$$a_1 = -4\frac{m}{s^2}$$

וצריך לחשב את A וx_0. הכוונה בנתון של שישית זמן מחזור היא ש:

$$\omega\frac{T}{6} = \omega\frac{\frac{2\pi}{\omega}}{6} = \frac{\pi}{3}$$

נרשום את הביטויים שיש לנו:

$$x_0 + A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x_1$$
$$-\omega A\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = v_1$$
$$-\omega^2 A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a_1$$

ונציב את הסינוסים והקוסינוסים:

$$x_0 + A\frac{1}{2} = x_1$$
$$-\omega A\frac{\sqrt{3}}{2} = v_1$$
$$-\omega^2 A\frac{1}{2} = a_1$$

יש פה שלושה ביטויים לשלושה נעלמים (אנחנו לא יודעים את התדירות!). כדי להיפטר מהתדירות שאינה ידועה, נחלץ את התדירות מהמשוואה של התדירות ונציב בתאוצה:

$$\omega = -\frac{2v_1}{\sqrt{3}A}$$
$$\omega^2 = \frac{4v_1^2}{3A^2}$$
$$-\frac{4v_1^2}{3A^2}A\frac{1}{2} = -\frac{2v_1^2}{3A} = a_1$$
$$A = -\frac{2v_1^2}{3a_1}$$

נציב את זה בביטוי למיקום לקבלת:

$$A = -\frac{2v_1^2}{3a_1}$$
$$x_0 = x_1 - \frac{1}{2}A = x_1 + \frac{2v_1^2}{3a_1}$$

ואם נציב מספרים נקבל:

$$A = \frac{2 \cdot 12\frac{m^2}{s^2}}{3 \cdot 4\frac{m}{s^2}} = 2m$$
$$x_0 = 6m - \frac{1}{2}A = 6m - 1m = 5m$$

כשהגוף עובר ב x_0, אנחנו יודעים שמהירותו מקסימלית (והמהירות המקסימלית היא התדירות כפול המשרעת), ותאוצתו אפס. אבל אם אתם מתעקשים, נחשב. אנחנו רוצים את הזמן בו המיקום הוא x_0:

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega t) = x_0$$

כלומר אנחנו רוצים שהקוסינוס יתאפס. זה קורה בפעם הראשונה כש $\omega t = \frac{\pi}{2}$.
נציב את זה בביטויי המהירות והתאוצה:

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t) = -\omega A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\omega A$$
$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) = -\omega^2 A\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$