

## סמפור

הכוחות הפועלים על הקורה הם הכובד, והציר. מכיוון שאיננו יודעים איזה כוח מפעיל הציר, נשתמש במשוואות החוק השני לתנועה מעגלית, סביב ציר שנמצא בנקודת הציר. מכיוון שהמרחק בין הציר שבחרנו לנקודה שבה פועל כוח הציר הוא 0, הוא לא מפעיל מומנט. המומנט היחיד הוא של הכובד, שפועל כמובן ממרכז המסה. נחשב את התאוצה הזוויתית:

$$\sum \tau = mg \frac{L}{2} \cos \theta = I \alpha$$

נעביר אגף לקבלת:

$$\alpha = \frac{mgL \cos \theta}{2I}$$

נתנו לנו את מומנט ההתמד של הקורה יחסית לציר,  $I = \frac{1}{3}mL^2$ , נציב את זה:

$$\alpha = \frac{mgL \cos \theta}{2 \cdot \frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g \cos \theta}{2L}$$

וכך יש לנו ביטוי לתאוצה הזוויתית. ביקשו את התאוצה הקווית של שתי נקודות. נקודה B שנמצאת במרחק:

$$r_B = 0.4m = \frac{0.4m \cdot 0.5m}{0.5m} = 0.8L$$

ונקודה A שנמצאת במרחק:

$$r_A = 0.15m = \frac{0.15m \cdot 0.5m}{0.5m} = 0.3L$$

כדי למצוא את התאוצה הזוויתית של שתי הנקודות פשוט נציב בקשר  $a = \alpha r$ :

$$a_A = \alpha r_A = \frac{3g \cos \theta}{2L} \cdot 0.3L = 0.45g \cos \theta$$

$$a_B = \alpha r_B = \frac{3g \cos \theta}{2L} \cdot 0.8L = 1.2g \cos \theta$$

ביקשו גם באופן ספציפי כשהזווית היא  $\theta = 50$ . נציב:

$$a_A = 0.45g \cos \theta \approx 0.29g \approx 2.9 \frac{m}{s^2}$$

$$a_B = 1.2g \cos \theta \approx 0.77g \approx 7.7 \frac{m}{s^2}$$

## חישוב מומנט התמד של מערכת נקודות

מומנט ההתמד מוגדר:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

שימו לב שהכוונה היא לציר שניצב לדף.

1. סביב מסה  $m_1$ :

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = m_2 L^2 + m_3 (\sqrt{2}L)^2 = \frac{m}{2} L^2 + m 2L^2 = \frac{5}{2} m L^2$$

2. סביב מסה  $m_3$ :

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1 (\sqrt{2}L)^2 + m_2 L^2 = \frac{m}{2} 2L^2 + \frac{m}{2} L^2 = \frac{3}{2} m L^2$$

3. על מנת לעבור לציר מקביל העובר דרך מרכז המסה, ניתן להשתמש במשפט שטיינר (זיכרו: המשפט נכון אך ורק למעבר מ/אל מרכז המסה!)  
עלינו לברר את המרחק של מרכז המסה מאחד הצירים שכבר חישבנו. קודם כל נברר את מרכז המסה, במערכת הצירים שמופיעה בשאלה. בציר X נקבל:

$$X_{cm} = \frac{m_1 L + m_2 0 + m_3 0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{m}{2} L}{2m} = \frac{L}{4}$$

ובציר Y:

$$Y_{cm} = \frac{m_1 0 + m_2 0 + m_3 L}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{m}{2} L}{2m} = \frac{L}{2}$$

עכשיו נותר לחשב את המרחק (בריבוע) בין מרכז המסה לאחת הנקודות שכבר חישבנו. אבחר את  $m_1$ :

$$R_{cm \rightarrow m_1}^2 = \left(L - \frac{L}{4}\right)^2 + \frac{L^2}{2} = \frac{13}{16} L^2$$

ומשפט שטיינר נותן לנו:

$$I_{cm} = I_{m_1} - (m_1 + m_2 + m_3) R_{cm \rightarrow m_1}^2 = \frac{5}{2} m L^2 - 2m \frac{13}{16} L^2 = \frac{7}{8} m L^2$$

## רצ'ט

קודם כל נתאר את כלל הכוחות בבעיה. על המוט פועלים:

- כוח הכובד ממרכז המוט כלפי מטה.
- הכוח שנובע מהציר המקובע למוט מימין למעלה. גודלו וכיוונו לא ידועים.
- כוח הנורמל בנקודה המגע עם הדיסקה, כלפי מעלה.
- כוח החיכוך עם הדיסקה. אם הדיסקה נעה ימינה, הוא פועל ימינה ולהפך.

על הדיסקה פועלים:

- כוח הכובד ממרכז הדיסקה.
- הכוח הנובע מהציר במרכז הדיסקה.
- כוח הנורמל בנקודת המגע עם המוט, כלפי מטה.
- כוח החיכוך בנקודת המגע עם המוט, פועל באופן מנוגד לחיכוך שפועל על המוט. אם הדיסקה נעה ימינה הוא פועל שמאלה ולהפך.

נוכל למצוא את גודל כוח החיכוך בעזרת חישובי מומנט על המוט בלבד. המוט לא יזז ולא מסתובב, ולכן סכום הכוחות וגם סכום המומנטים עליו מתאפס. הכי נוח יהיה לחשב את המומנטים ביחס לציר הסיבוב, מכיוון שזה יחסוך לנו את הבירור לגבי הכוח שהציר עצמו מפעיל. זה משאיר שלושה כוחות שמפעילים מומנטים. נשים לפני כוח החיכוך סימן  $\pm$ , וכך נבצע את שתי האפשרויות במכה (שהחיכוך שמאלה או ימינה).

$$\begin{aligned}\sum \tau &= 0 \\ \sum \tau &= Nl \sin \theta - mg \frac{l}{2} \sin \theta \pm fl \cos \theta = 0 \\ f &= \mu N \\ 0 &= N - \frac{mg}{2} \pm \mu N \cot \theta = 0 \\ mg &= 2N (1 \pm \mu \cot \theta) \\ N &= \frac{mg}{2 \pm 2\mu \cot \theta} \\ f = \mu N &= \frac{\mu mg}{2 \pm 2\mu \cot \theta}\end{aligned}$$

אחרי כל הסיפור הזה, יש לנו את גודל כוח החיכוך, עבור שתי האפשרויות (ימינה ושמאלה). נחשב את התאוצה הזוויתית של הדיסקה. אם נבחר כציר את ציר הסיבוב של הדיסקה, ישאר רק מומנט אחד. המומנט של הציר ושל הכובד מתאפסים מכיוון שמרחקם מהציר אפסי, והמומנט של הנורמל מתאפס מכיוון שהוא בכיוון הרדיאלי. רק החיכוך מפעיל מומנט. אם כך, משוואת התאוצה הזוויתית פשוטה למדי:

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha \\ \pm fR &= I\alpha \\ \alpha &= \pm \frac{fR}{I}\end{aligned}$$

עכשיו אנחנו צריכים לשאול את עצמנו מה הקשר בין תאוצה לבין זמן העצירה. על פי הגדרה, השינוי במהירות הסיבובית הוא התאוצה הסיבובית, ובמקרה של תאוצה קבועה המהירות הזוויתית מקבלת ביטוי פשוט. בעזרתו ניתן להביע את זמן העצירה:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = 0$$

$$t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-\omega_0}{\pm \frac{fR}{I}}$$

בהנחה שהמהירויות ההתחלתיות שמאלה וימינה היו זהות (אבל עם סימנים מנוגדים), היחס הוא פשוט:

$$\frac{t_+}{t_-} = \frac{\frac{\omega_0}{\frac{f_+ R}{I}}}{\frac{\omega_0}{\frac{f_- R}{I}}} = \frac{f_-}{f_+} =$$

$$= \frac{\frac{\mu mg}{2-2\mu \cot \theta}}{\frac{\mu mg}{2+2\mu \cot \theta}} = \frac{1 + \mu \cot \theta}{1 - \mu \cot \theta} = \frac{\tan \theta + \mu}{\tan \theta - \mu}$$

כשהפעולה האחרונה של המרת הקוטנגנס לטנגנס נעשתה רק כדי שמי שקיבל פתרון עם טנגנס ידע שגם הוא נכון.

התוצאה שקיבלנו חסרת יחידות, כנאה ליחסים. אופן הפתרון היה כזה: מצאנו את כוח החיכוך משיקולי סטיקה של המוט, ואז חישבנו את השינוי בתאוצה של הגוף התחתון. השינוי בתאוצה הופכי לשינוי בזמן.

## מסות על גלגלת

נרשום את משוואות התאוצה הקווית של שני הגופים:

$$M_2 a_2 = T_2 - M_2 g$$

$$M_1 a_1 = T_1 - M_1 g$$

בנוסף, יש לנו את משוואת התנועה המעגלית:

$$I\alpha = T_2 r_2 - T_1 r_1$$

עכשיו נוסיף את תנאי חוסר ההחלקה:

$$a_1 = -\alpha r_1$$

$$a_2 = \alpha r_2$$

נבודד את ה-Tים מהמשוואה הראשונה:

$$T_2 = M_2(a_2 + g) = M_2(\alpha r_2 + g)$$

$$T_1 = M_1(a_1 + g) = M_1(-\alpha r_1 + g)$$

ונציב במשוואת התנועה המעגלית:

$$I\alpha = T_2 r_2 - T_1 r_1 = M_2 r_2^2 \alpha + M_2 r_2 g + M_1 r_1^2 \alpha - M_1 r_1 g$$

$$(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2) \alpha = (M_2 r_2 - M_1 r_1) g$$

א. נשווה את אלפה לאפס ונקבל:

$$0 = (M_2 r_2 - M_1 r_1)$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

כמובן שמשוואה זו היא פשוט השוואת סך המומנטים לאפס, וניתן היה להגיע אליה ישירות, אבל כבר חישבנו את אלפה באופן כללי אז למה לא להשתמש בזה.

ב. אם, ורק אם (ולא, זה לא מובן מאליו)

$$(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2) \neq 0$$

ניתן לחלק בגורם זה ולקבל:

$$\alpha = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)}{(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2)} g$$

והתאוצות הן:

$$a_1 = -\alpha r_1 = -\frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)}{(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2)} g r_1$$

$$a_2 = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)}{(I - M_2 r_2^2 - M_1 r_1^2)} g r_2$$

כאשר בכל האיזכורים שלו עד כאן שווה ל:

$$I = \frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2}$$

ואל תבלבלו בבקשה בין  $m$  קטנה ל  $M$  גדולה.