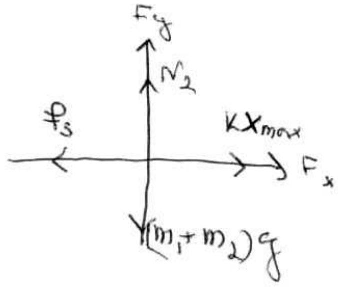
Solutions to Oscillations

.1

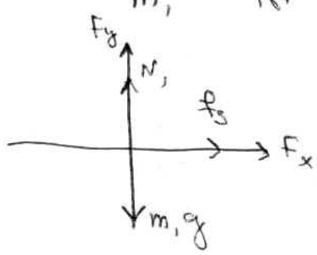
ללא החלקה כלומר נחשב את הקפיץ באמפליטודה מקסימלית

נבנה שרטוט כוחות על m_2



$$\Sigma F_x:\ m_2 a = k x_{max} - f_s$$

נבנה שרטוט כוחות על m_1



$$\Sigma F_x:\ m_1 a = \mu_s m_1 g$$

$$a = \mu_s g$$

התאוצה של שני הגופים משותפת – מתנאי השאלה הם אמורים לנוע מחוברים

$$m_2 \mu_s g = k x_{max} - m_1 \mu_s g$$

$$\Downarrow$$

$$x_{max} = \frac{\mu_s g}{k}(m_1 + m_2)$$

$$\underline{\underline{x_{max} = 0.12\,m}} \leftarrow \begin{cases} 1.22\,kg = m_1 \\ 8.22\,kg = m_2 \\ 0.42 = \mu_s \\ 344\,N/m = k \end{cases}$$

N2

מהירות הכדור ברגע לפני התנגשות

$$V_1 = \sqrt{2gh} = 4.43\ m/sec$$

מהירות המסה עם הכדור ברגע אחרי התנגשות

$$m_1 V_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} = 0.885\ m/sec$$

$(m_1+m_2)g = k X_0'$ מצב ש"ו משקל

מצב לפני פגיעת הכדור:

$$m_2 g = k X_0$$

$X = A\cos(\omega t + \theta)$ משוואת התנודה:

$$t = 0 \Rightarrow X(0) = X_0 - X_0' = \frac{m_1 g}{k}$$

$$V(0) = V$$

$$V = -\omega A \sin(\omega t + \theta)$$

$$X(0) = A\cos\theta \ ; \ V(0) = -\omega A \sin\theta$$

$$E = \frac{k X(0)^2}{2} + mg(X_0 - X_0') + \frac{m V(0)^2}{2} \ , \ \underline{m = m_1 + m_2}!$$

א. $A = 0.22m$ ב. $T = 1.405 sec$ ג. $X = 0.22\cos(\sqrt{20}\,t + 1.11)$

ד. $V = -0.98\sin(\sqrt{20}\cdot t + 1.11)$ ה. $E = 14.4 J$

שלמה התנגשות: $m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2} = m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2}$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

משוואות התנועה של המסה הקשורה:

$$x = x_m \cos(\omega t + \theta) \qquad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad , \quad m_2 -$$ המסה הקשורה

$$v = -x_m \omega \sin(\omega t + \theta) \qquad (2)$$

ברגע התנגשות: $t = 0$

ברגע עצירה $v = 0$

$\underline{\omega t_1 + \theta = \pi}$; $\omega = \sqrt{\frac{150}{6}} = 5\ sec^{-1}$.

(1א) $t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = 0.314 sec \Leftarrow \frac{\pi}{2} = \theta$

(ב) מהירות של מסה m_2 ברגע $t=0$

אחרי התנגשות:

$$\begin{cases} 4u_1 + 6u_2 = 40 \\ 2u_1^2 + 3u_2^2 = 200 \end{cases} \Rightarrow u_2 = 8\ m/sec$$

$0.5 = x_m \cos\theta$ מ-(1)

$-8 = -x_m \cdot 5 \sin\theta$ מ-(2)

$$tg\theta = 3.2 \Rightarrow \theta = 1.87$$

$$t_1 = \frac{\pi - \theta}{\omega} \approx 0.375\ sec.$$

בצורה דומה:

(ג) $t = 0.254 sec$

(ד) $t = 0.314 sec$

(ה) $t = 0.314 sec$

(ו) $t = 0.338 sec$

.4

<u>פתרון</u>

א. במצב שיווי המשקל המתיחות בקפיץ kx_2 מתאזנת ע״י כוח הכובד,

הפועל על קטע החבל המשתלשל, שגודלו $\frac{mg}{l}x_1$ כלומר:

1. $$kx_2=\frac{mg}{l}x_1 \quad\rightarrow\quad \frac{x_2}{x_1}=\frac{mg}{lk}$$

שים לב שאם $x_2>x_1$ אזי $mg>kl$.

כשמסיטים את המערכת ממצב שיווי המשקל בשיעור נוסף x נקבל:

2. $$\sum F=\frac{mg}{l}(x_1+x)-k(x_2+x)=\frac{mg}{l}x-kx=-\{k-\frac{mg}{l}\}x\equiv -Cx$$

ב. על פי סימנו של הקבוע $C\equiv k-\frac{mg}{l}$ נזהה את אופי שיווי המשקל.

(<u>זכור</u>: התנאי $F\propto x$ אינו תנאי מספיק לתה״פ)

I עבור $C>0$ או $k>\frac{mg}{l}$ שווי משקל יציב (כוח מחזיר!).

זה יקרה כאשר: $x_2<x_1$

II עבור $C<0$ או $k<\frac{mg}{l}$ שווי משקל רופף.

זה יקרה כש: $x_1<x_2$. החבל יחליק מטה והקפיץ לא יצליח לבולמו!

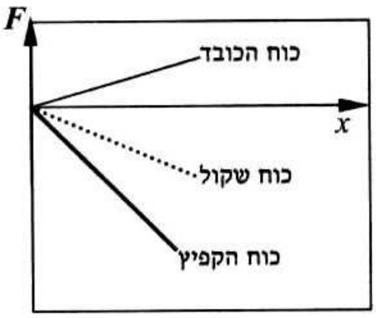
3. עבור $C=0$ או $k=\frac{mg}{l}$ שווי משקל אדיש.

זה יקרה כש: $x_2=x_1$. הכוח השקול הפועל על הגוף מתאפס בכל x!

ג. המערכת תנוע בתה״פ רק כאשר הכוח הוא כוח מחזיר (מקרה 1 $C>0$).

זמן המחזור יהיה כפי שראינו: $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$

<u>הערה</u>: במערכת הנ״ל מתקיים ״מאבק״ בין הכוח המחזיר לנש״מ (הקפיץ) לבין כוח המרחיק מהנש״מ (כוח הכובד) שני הכוחות ליניאריים בהעתק. הכוח הדומיננטי קובע את את אופי שיווי המשקל ואת סוג התנועה. הגרף מתאר מקרה בו כוח הקפיץ גובר על כוח הכובד.



.5

נמתח את הקפיץ בשיעור כולל x ונרפה ממצב מנוחה. המתיחות בקפיץ תהיה kx והיא תפעל באופן שווה על שני הגופים. כל אחד מהגופים ינוע בתנועה מחזורית סביב נקודת שיווי המשקל שלו. שיעור הסטייה של כל אחד מהגופים מהנש"מ שלו אינו שווה בדרך כלל! אבל ברור שחייב להיות יחס קבוע בין ההעתקים x_1 ו x_2. כשהמסות זהות גם משרעות התנודה זהות. וכאשר המסות אינן שוות למסה הקלה יותר תהיה משרעת גדולה יותר. (אם מסה אחת גדולה בהרבה מהמסה השניה היא כמעט ולא תנוע! כמו במקרה בו קפיץ רתום מצידו האחד לבול ומצדו השני לקיר.) מטרתנו היא לבטא את הכוח הפועל על הגוף כפונקציה של העתקו שלו מהנש"מ שלו במתכונת:

$$(k=1,2) \qquad F_k=-C_k x_k \qquad .1$$

יחסי ההעתקים כיחסי התאוצות. ולכן נחשב את תאוצות הגופים ונקבל בהתאמה:

$.a_2=kx/m_2 \ , \ a_1=kx/m_1$

יחסי ההעתקים: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{m_2}{m_1}$. מהקשר $x=x_1+x_2$ נחלץ ונקבל ש:

$$x_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}x \quad x_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}x \qquad .2$$

או:

$$x=\frac{m_1+m_2}{m_2}x_1=\frac{m_1+m_2}{m_1}x_2 \qquad .3$$

נוכל כעת לבטא את הכוח השקול הפועל על כל גוף כפונקציה של מרחקו מהנש"מ.

גוף 1: $F_1(x_1)=-kx=-\left[k\frac{m_1+m_2}{m_2}\right]x_1\equiv -C_1x_1$

גוף 2: $F_2(x_2)=-kx=-\left[k\frac{m_1+m_2}{m_1}\right]x_2\equiv -C_2x_2$

מחוק שימור התנע נובע (ראה פרק 9) שתדירויות הגופים חייבות להיות זהות:

$$f_1=f_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_1}{m_1}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_2}{m_2}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{(m_1+m_2)}{m_1m_2}\right)k}\equiv\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\overline{m}}} \qquad .4$$

הגודל $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\equiv\overline{m}$ נקרא המסה המופחתת (או המצומצמת- *reduced mass*) של צמד החלקיקים.

.6

<u>פתרון</u>

א. המתיחות בחוט היא mg. מתיחות הקפיץ שווה לפעמיים מתיחות זו כלומר:

$$kx_0=2mg \qquad .1$$

ומכאן התארכות הקפיץ היא:

$$x_0=2mg/k \qquad .2$$

ב. כאשר מורידים את הבול בשיעור נוסף x הקפיץ נמתח בשיעור נוסף של $x/2$ והמתיחות בקפיץ תגדל ב- $kx/2$ והמתיחות בחוט השווה למחצית המתיחות שבקפיץ תהיה $k(x_0+x/2)/2=mg+kx/4$ ולכן הכוח השקול שיפעל הבול:

$$\sum F=mg-(mg+kx/4)=-(k/4)x\equiv -Cx \qquad .3$$

ג. נציב בנוסחת זמן המחזור ונקבל:

$$T=2\pi\sqrt{4m/k}=4\pi\sqrt{m/k} \qquad .4$$

זהו זמן כפול מהזמן שמתקבל כאשר הבול רתום ישירות לקפיץ!

ד. בכל רגע נתון שווה המתיחות בחוט למחצית המתיחות בקפיץ ולכן היא תתאפס כשהמתיחות בקפיץ תתאפס! זה יקרה כאשר הקפיץ יהיה רפוי ואז האמפליטודה (המוגדרת כמרחק המקסימלי מהנש"מ) תהיה שווה ל:

$$A_{\max}=x_0=2mg/k \qquad .5$$

.7

<u>פתרון</u>

א. בכל רגע יש לשני הכדורים מהירות זווית זהה: $\omega = \dot{\theta}$, אך המהירויות המשיקיות שלהם שונות:

.1 $V_1 = l_1\dot{\theta}$ ו $V_2 = l_2\dot{\theta}$

כאשר האנרגיה הפוטנציאלית של הכדור הראשון עולה, יורדת האנרגיה הפוטנציאלית של הכדור השני (ולהפך) ולכן האנרגיה הכללית היא:

.2 $$E_{tot} = \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}^2 + mgl_1(1-\cos\theta) + mgl_0 - mgl_2(1-\cos\theta) = const$$

נשתמש בקרוב לזווית קטנה: $\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ ונקבל:

.3 $$E_{tot} \approx \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\theta^2(l_1 - l_2) + mgl_0 = const$$

נגזור ביטוי זה לפי t, נשתמש בעובדה שהאנרגיה קבועה בזמן, נצמצם בגורם המשותף $m\dot{\theta}$ ונקבל:

.4 $$\ddot{\theta}(l_1^2 + l_2^2) + g(l_1 - l_2)\theta = 0$$ או:

.5 $$\ddot{\theta} + \left(g\frac{(l_1 - l_2)}{(l_1^2 + l_2^2)}\right)\theta \equiv \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

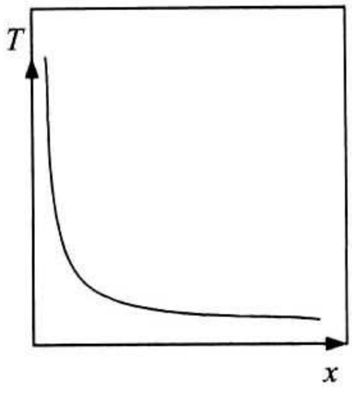
כאשר התדירות הזוויתית מוגדרת:

.6 $$\omega_0^2 \equiv \left(g\frac{(l_1 - l_2)}{(l_1^2 + l_2^2)}\right)$$ ומכאן זמן המחזור:

.7 $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2}{g(l_1 - l_2)}}$$

ב. כאשר נקודת התלייה היא במרכז המוט כלומר: $l_1 \to l_2$ גודלו של הכוח המחזיר מתאפס ונקבל ש $T_0 \to \infty$. פרוש הדבר שהמוט יישאר בשיווי משקל אדיש בכל זווית θ בו ייעזב. כאשר $l_2 = 0$ נקבל ש $l_1 = l_0$ נציב ב- (7) ונקבל זמן מחזור של מטוטלת מתמטית רגילה:

.8 $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$$



הגרף המצורף מראה את תלות זמן המחזור בגודל המנורמל $x \equiv \dfrac{l_1 - l_2}{l_0}$

.8

<u>**פתרון**</u>

א. משיקולי מומנטים סביב מרכז הכובד:

$$N_1\left(l-x\right)=N_2\left(l+x\right) \qquad .1$$

שיקולי כוחות:

$$N_1+N_2=mg \qquad .2$$

נפתור ונקבל:

$$N_1=\frac{mg}{2}+\frac{mgx}{2l} \qquad N_2=\frac{mg}{2}-\frac{mgx}{2l} \qquad .3$$

ב. כוחות החיכוך הפועלים מנקודות ההשקה בגליל, יחסיים לכוח הנורמלי ופועלים זה כנגד זה:

$$f=f_1-f_2=\mu(N_2-N_1)=-\left(\frac{\mu mg}{l}\right)x\equiv -Cx \qquad .4$$

ג. זהו כוח הרמוני עם קבוע כוח: $C=\left(\frac{\mu mg}{l}\right)$ ולכן הקורה תנוע בתה"פ. זמן המחזור יהיה:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}} \qquad .5$$

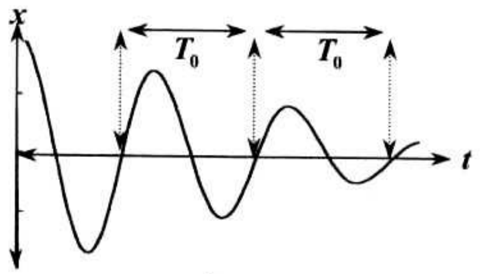
.9

<u>פתרון</u>

א. כאשר הבול נע ימינה פועל החיכוך שמאלה ולהפך. כוח החיכוך הוא כוח קבוע בגודלו, אך לא בכיוונו ולכן הגוף ינוע במעין תה״פ כאשר מיקום הנש״מ אינו מתלכד עם מיקום נקודת הרפיון. יתר על כן יהיו שתי נקודות שיווי משקל. האחת קשורה בתנועת הבול שמאלה והשניה קשורה בתנועת הבול ימינה. כאשר הבול נע שמאלה, הנש״מ ימוקם במרחק $x_0 = \mu mg / k$ מימין לנקודת הרפיון וכאשר הבול נע ימינה יוסט מיקום הנש״מ בשיעור זהה שמאלה, כמוראה בתרשים. בכל שלב של התנועה תתבצע תנועה הרמונית (סימטרית!) סביב הנש״מ של אותו שלב. בשל החיכוך תקטן האנרגיה המכנית בהדרגה עד שלבסוף ייעצר הבול לחלוטין. העצירה הסופית, להבדיל מהעצירות הרגעיות, חייבת להיות בתחום בו כוח הקפיץ קטן מכוח החיכוך הסטטי המקסימלי כלומר בתחום: $|x| \le x_0$.

ב. כיוון שמשרעת התנועה סביב ה- 0 תלך ותקטן, ברור שהמרחק המקסימלי יתקבל כאשר הבול יגיע לקצה השמאלי בפעם הראשונה. נחשב מרחק זה בשתי דרכים:

<u>דרך I שיקולי אנרגיה</u>: נקודת העצירה הראשונה משמאל למצב ה- 0 תסומן ב A_1 משיקולי אנרגיה נקבל:



$$\frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 + \mu mg(A_0 + A_1) \qquad .1$$

נציב את הקשר $kx_0 = \mu mg$ נצמצם, נסדר ונקבל:

$$A_1^2 + 2x_0A_1 + 2x_0A_0 - A_0^2 = 0 \qquad .2$$

זוהי משוואה ריבועית ב- A_1 שפתרונה:

$$A_1 = A_0 - 2x_0 \qquad .3$$

<u>דרך II ישירות מתוך התכונות של תה״פ</u>: כידוע בתה״פ הבול נע באופן סימטרי סביב הנש״מ. ולכן נקודת העצירה הראשונה חייבת להיות ממוקמת באופן סימטרי סביב הנש״מ הימני. כלומר במרחק $(A_0 - x_0)$ מהנש״מ הימני או במרחק $(A_0 - 2x_0)$ מנקודת ה- 0. שים לב שבכל חצי מחזור מתקצרת המשרעת בשיעור של $2x_0$ ולכן במחזור שלם היא תתקצר בשיעור של $4x_0$. התנהגות ההעתק בזמן מתוארת על ידי הגרף. שים לב שזמן המחזור אינו מושפע מהחיכוך הקבוע בגודלו!

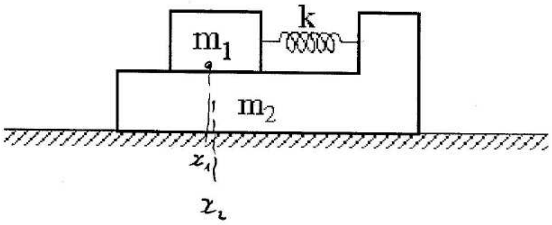
ג. נצביע על כיוון הפתרון. ראינו שהמשרעת מתקצרת בכל חצי מחזור בשיעור $2x_0$. יש לבדוק מתי מתקיים $A_n > x_0$ בעוד ש $A_{n+1} < x_0$ כאשר $A_n = A_0 - 2nx_0$ ולהשתמש בתוצאה שקבלנו בסעיף ב׳.

.11

גוף נקודתי שמסתו m_1 חופשי לנוע אופקית ללא חיכוך על עגלה שמסתה m_2. הגוף הנקודתי מחובר לעגלה בקפיץ בעל קבוע k. העגלה מונחת על משטח אופקי חסר חיכוך. בזמן מסויים מעניקים לעגלה מהירות ימינה.

א. מהי תדירות התנודות שיבצעו הגוף הנקודתי והעגלה?

ב. מהי התדירות בגבולות $m_1 \ll m_2$ ו- $m_2 \ll m_1$?



$$\begin{cases} \Sigma F_1 = m_1 a_1 \\ \Sigma F_2 = m_2 a_2 \\ x_{cm}^{i} = x_{cm}^{f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k(x_1 - x_2) = m_1 a_1 \\ -k(x_2 - x_1) = m_2 a_2 \\ 0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 \Rightarrow x_1 = -\frac{m_2}{m_1} x_2 \end{cases}$$

$$-kx_2 + k\cdot\left(-\frac{m_2}{m_1} x_2\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\, x_2 = 0$$

$$\omega = \sqrt{k\,\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}}$$

כאשר $m_1 >> m_2$ $\quad \omega \to \sqrt{\frac{k}{m_2}}$