# שימושים של $Y_\ell^m$

$$\Psi(x,y,z) = N\cdot(xy+yz+zx)\,e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\alpha^2}} =$$

$$= N(xy+yz+zx)\,e^{-r^2/\alpha^2}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$Y_2^{-2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{-2i\phi}$$
$$Y_2^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{-i\phi}$$
$$Y_2^{0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$
$$Y_2^{1} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$
$$Y_2^{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

נציג בעזרת $Y_\ell^m$:

$$xy+yz+zx = r^2\Big(\sin^2\theta\,\tfrac{1}{2}\sin 2\phi + \sin\theta\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\theta\cos\phi\Big) =$$

$$= r^2\Big(\frac{1}{2\cdot 2i}\sin^2\theta\,(e^{2i\phi}-e^{-2i\phi}) + \frac{1}{2i}\sin\theta\cos\theta\,(e^{i\phi}-e^{-i\phi}) + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\,(e^{i\phi}+e^{-i\phi})\Big) =$$

$$= r^2\Big(\frac{1}{\cancel{4}i}\cdot\cancel{4}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}(Y_2^2 - Y_2^{-2}) + \frac{1}{\cancel{2}i}\cancel{2}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}(-Y_2^1 - Y_2^{-1}) + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}(-Y_2^1 + Y_2^{-1})\Big) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\,\beta\,\Big(Y_2^2 - Y_2^{-2} + (1+i)Y_2^1 - (1-i)Y_2^{-1}\Big)$$

נרמול

הערכים המוחלטים של המקדמים בריבוע נותנים את ההסתברויות.

ההסתברות לקבל $L^2=0$ היא אפס...

$L^2=6\hbar^2 \Leftarrow$ $l=2$ . כל ה-$Y_l^m$ שקיבלנו מתאימים

ל- $l=2$ לכן ההסתברות לקבל $l=2$ היא 1.

$$\Psi(x,y,z) = R(r)T(\theta,\varphi)$$

נרמול:

$$\beta^2 \int T^*(\theta,\varphi)T(\theta,\varphi)\,d\Omega = 1$$

$$\Rightarrow \beta^2 \frac{2\pi}{15}(1+1+2+2) = \beta^2 \frac{12\pi}{15} = \beta^2 \frac{4\pi}{5} = 1$$

$$\beta = \sqrt{\frac{15}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$T = \frac{1}{i}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(Y_2^2 - Y_2^{-2} + (1+i)Y_2^1 - (1-i)Y_2^{-1}\right)$$

$$P(l=2, m=2) = \frac{1}{6}$$

$$P(l=2, m=-2) = \frac{1}{6}$$

$$P(l=2, m=1) = \frac{1}{3}$$

$$P(l=2, m=-1) = \frac{1}{3}$$

$$P(l=2, m=0) = 0$$