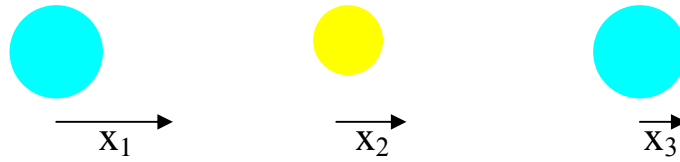


3. נרשום את הכוחות הפועלים על כל גוף. ללא הגבלת הכלליות נבחר $x_1 > x_2 > x_3$



נרשום משוואת כוחות עבור כל אטום.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3) \\ m_1 \ddot{x}_3 &= k(x_2 - x_3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_2 \\ \ddot{x}_2 = \frac{k}{m_2}x_1 - 2\frac{k}{m_2}x_2 + \frac{k}{m_2}x_3 \\ \ddot{x}_3 = \frac{k}{m_1}x_2 - \frac{k}{m_1}x_3 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\vec{x}} = \hat{A}\vec{x}$$

נרשום בצורה מטריצית:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -2\frac{k}{m_2} & \frac{k}{m_2} \\ 0 & \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

נמצא את הע"ע.

$$|\hat{I}s^2\hat{A}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} s^2 + \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} & 0 \\ -\frac{k}{m_2} & s^2 + 2\frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} \\ 0 & -\frac{k}{m_1} & s^2 + \frac{k}{m_1} \end{vmatrix} = 0$$

מכאן, הפולינום האופייני:

$$\left(s^2 + \frac{k}{m_1}\right) \left[\left(s^2 + 2\frac{k}{m_2}\right) \left(s^2 + \frac{k}{m_1}\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2} \right] + \frac{k}{m_1} \left(-\frac{k}{m_2}\right) \left(s^2 + \frac{k}{m_1}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_1^2 + \frac{k}{m_1} = 0 \Rightarrow s_1^2 = -\frac{k}{m_1} \Rightarrow s^4 + s^2 \left(2\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right) + \frac{k^2}{m_1 m_2} - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0 \Rightarrow$$

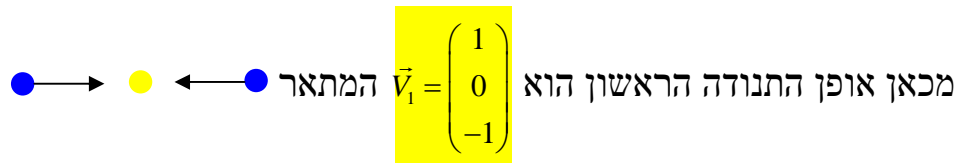
$$\Rightarrow s_2^2 = 0 \Rightarrow s_3^2 = -2\frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_1}$$

מכאן, התדירויות העצמיות: $\omega_3^2 = -k \frac{2m_1 + m_2}{m_1 m_2}$, $\omega_2^2 = 0$, $\omega_1^2 = \frac{k}{m_1}$

נמצא ו"ע המתאים לע"ע הראשון:

$$(\hat{I}s_1^2 - \hat{A})\vec{V}_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m_1} & 0 \\ -\frac{k}{m_2} & 2\frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_2} \\ 0 & -\frac{k}{m_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ V_{13} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0V_{11} - \frac{k}{m_1}V_{12} + 0V_{13} = 0 \Rightarrow V_{12} = 0 \\ -\frac{k}{m_2}V_{11} - \frac{k}{m_2}V_{13} = 0 \end{cases}$$

נגדיר $V_{11}=1$ ונקבל $V_{13}=-1$.



נמצא ו"ע המתאים לע"ע השני:

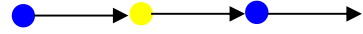
$$(\hat{I}s_2^2 - \hat{A})\vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} & 0 \\ -\frac{k}{m_2} & 2\frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_2} \\ 0 & -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \\ V_{23} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{k}{m_1}V_{21} - \frac{k}{m_1}V_{22} + 0V_{23} = 0$$

נגדיר $V_{21}=1$ ונקבל $V_{22}=1$. מכאן המשוואה השנייה

$$-\frac{k}{m_2} + 2\frac{k}{m_2} - \frac{k}{m_2}V_{23} = 0 \Rightarrow V_{23} = 1$$

מכאן אופן התנודה השני הוא $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ המתאר את תנודת מרכז המסה (העתקה)

נמצא ו"ע המתאים לע"ע השלישי:



$$(\hat{I}s_3^2 - \hat{A})\vec{V}_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2\frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_1} & 0 \\ -\frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_2} \\ 0 & -\frac{k}{m_1} & -2\frac{k}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{31} \\ V_{32} \\ V_{33} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\frac{k}{m_2}V_{31} - \frac{k}{m_1}V_{32} + 0V_{33} = 0 \\ -\frac{k}{m_2}V_{31} - \frac{k}{m_1}V_{32} - \frac{k}{m_2}V_{33} = 0 \end{cases}$$

נחסיר בין שתי המשוואות ונקבל $\frac{k}{m_2}V_{31} - \frac{k}{m_2}V_{33} = 0$

נגדיר $V_{31}=1$ ונקבל $V_{33}=1$. מכאן $V_{32} = -2\frac{m_1}{m_2}$

מכאן אופן התנודה השלישי הוא $\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{m_1}{m_2} \\ 1 \end{pmatrix}$ המתאר

בהצבת המספרים נקבל את התדרים העצמיים (k מוכפל במספר אבוגדרו!)

$$f_3 = 2.3 \times 10^{13} \text{ Hz}, f_2 = 0, f_1 = 1.2 \times 10^{13} \text{ Hz} \text{ כולם ב-IR רחוק.}$$