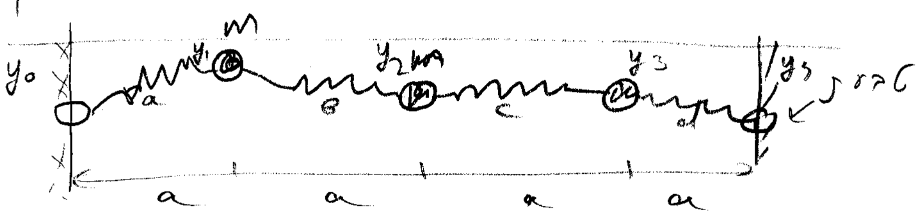
תרגיל

נתונים 4 קפיצים בעלי קבוע k, אורך המנוחה x_0 המחוברים לשלוש מסות m. כל מסה מחוברת לשני קפיצים המרוחקים מרחק a.



הקפיצים מחוברים בקצותיהם לטבעות חסרות מסה וחיכוך.

א) הראה כי בקירוב בו x_0, a גדולים מהתארכות הקפיץ בכיוון האנכי, אז המתיחות בקפיצים שווה ופועלת בכיוון האנכי בלבד.

ב) מהם אופני התנודה והתדירויות העצמיות?

פתרון

נתון: $a > x_0$, $\Delta y_i \ll a$

מתיחות הקפיץ:

$$|\vec{T}| = k(\ell - x_0)$$

אז

$$T_2 = k\left(\sqrt{(y_2-y_1)^2+a^2} - x_0\right) = $$

$$\simeq k(a-x_0) + O\left(\left(\frac{y}{a}\right)^2\right)$$

באופן כללי:

$$T_i = k(a-x_0) + O\left(\left(\frac{y}{a}\right)^2\right)$$

נגדיר

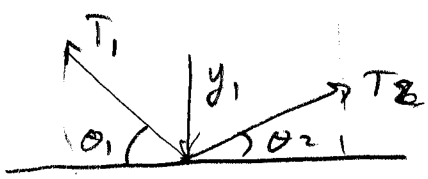
$$T \equiv k(a-x_0)$$

נסתכל על המסה הראשונה:

$$\hat{x}\cdot\vec{F}_1 = T_2\cos\theta_2 - T_1\cos\theta_1 \simeq O(\theta^2)$$

$$-\hat{y}\cdot\vec{F}_1 = T_2\sin\theta_2 + T_1\sin\theta_1 \simeq T(\tan\theta_1+\tan\theta_2) + O(\theta^2) \simeq$$

$$\simeq T\left(\frac{y_1-y_2}{a} + \frac{y_1-y_0}{a}\right)$$



ובאופן דומה עבור קפיצים אחרים.

$$\hat{y}\cdot\vec{F}_i = \frac{T}{a}(y_{i+1}-y_i) - \frac{T}{a}(y_i - y_{i-1})$$

ב) משוואות התנועה:

$$\begin{cases} 0\cdot \ddot{y}_0 = \frac{T}{a}(y_1 - y_0) \\ m\ddot{y}_1 = \frac{T}{a}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ m\ddot{y}_2 = \frac{T}{a}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ m\ddot{y}_3 = \frac{T}{a}(y_4 - 2y_3 + y_2) \\ 0\cdot y_3 = \frac{T}{a}(y_4 - y_3) \end{cases}$$

נקבל:

$$y_0 = y_1$$
$$y_3 = y_4$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{T}{ma}(y_2 - y_1)$$
$$\ddot{y}_2 = \frac{T}{ma}(y_3 - 2y_2 + y_1)$$
$$y_3 = \frac{T}{ma}(-y_3 + y_2)$$

$$\ddot{\vec{y}} = -A\vec{y} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$-A = \frac{T}{ma}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(A - \frac{T}{ma}\omega^2\right) = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1-\omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\omega^2 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$(1-\omega^2)\left[(2-\omega^2)(1-\omega^2) - 1\right] - (1-\omega^2) = 0$$
$$(1-\omega^2)(\cancel{2} - 3\omega^2 + \omega^4 - \cancel{2}) = 0$$

$$\omega^2 = 0, 1, 3$$

$\underline{\omega^2 = 0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{V}^{(1)} = 0 \Rightarrow$$

הכוונה כאן היא
שהמסות נעות ביחד
בכיוון אחד במהירות שווה.
(לא תנועה הרמונית).

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{V}^{(1)} = 0 \Rightarrow \vec{V}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\omega^2 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{V}^{(2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{V}^{(2)} = 0 \Rightarrow \vec{V}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\omega^2 = 3}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{V}^{(3)} = 0 \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{V}^{(3)} = 0 \Rightarrow \vec{V}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

הפתרון:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{Y} = &(A_1 t + B_1)\vec{V_1} + \\ &+ A_2 \vec{V_2} \cos\left(\sqrt{\tfrac{T}{ma}}\, t + \varphi_2\right) + \\ &+ A_3 \vec{V_3} \cos\left(\sqrt{\tfrac{3T}{ma}}\, t + \varphi_3\right) \end{aligned}}$$