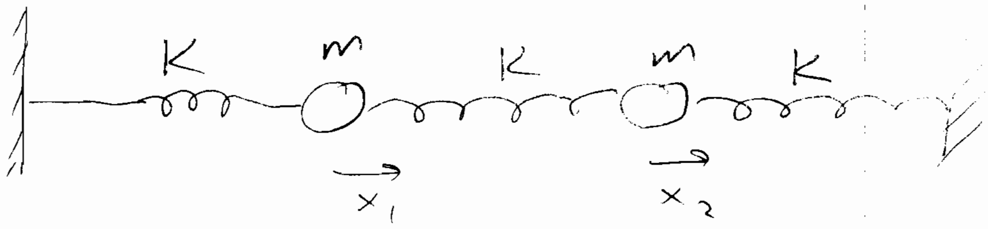
שאלה 1



א)

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2Kx_1 + Kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = -2Kx_2 + Kx_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{K}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3$$

תדירויות עצמיות $\quad \omega_1^2 = \frac{K}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{3K}{m}$

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ב)

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2Kx_1 + Kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = Kx_1 - 2Kx_2 + F_0\cos\omega t \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 + x_2 \qquad y_2 = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = -Ky_1 + F_0\cos\omega t \\ m\ddot{y}_2 = -3Ky_2 - F_0\cos\omega t \end{cases}$$

$$y_{1p} = A\cos\omega t \Rightarrow -mA\omega^2 = -KA + F_0$$ פתרון פרטי:

$$A = \frac{F_0}{-m\omega^2 + K}$$

$$y_{1p} = \frac{F_0}{-m\omega^2 + K}\cos\omega t$$

$$y_{2p} = \frac{-F_0}{-m\omega^2 + 3K}\cos\omega t$$

$$y_1(t) = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t + \frac{F_0}{-m\omega^2 + K}\cos\omega t$$

$$y_2(t) = A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t - \frac{F_0}{-m\omega^2 + 3K}\cos\omega t$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) =$$
$$= \frac{1}{2}(y_{1h} + y_{2h}) + \frac{F_0}{2}\left(\frac{1}{k - m\omega^2} - \frac{1}{3k - m\omega^2}\right)\cos\omega t$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) =$$
$$= \frac{1}{2}(y_{1h} - y_{2h}) \mp \frac{F_0}{2}\left(\frac{1}{k - m\omega^2} + \frac{1}{3k - m\omega^2}\right)\cos\omega t$$

[illegible] המאולצים

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(y_{1h} + y_{2h})(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) + F_0 \cdot 2k\cos\omega t}{(y_{1h} - y_{2h})(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) + F_0 \cdot 2(2k - m\omega^2)\cos\omega t}$$

$\underline{\omega \to \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ $\qquad\qquad$ $\omega \to \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{k}{2k - k} = 1 \qquad\qquad \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{k}{2k - 3k} = -1$$

במקרה זה מקבלים את אופני התנודה העצמיים.

אם הכוח לא קיים ($F_0 = 0$)

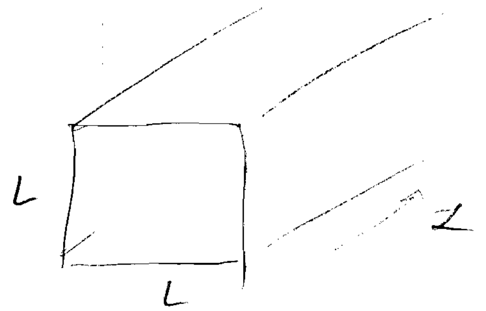
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_{1h} + y_{2h}}{y_{1h} - y_{2h}}$$

היחס תלוי בזמן ועל ידי בחירת תנאי התחלה מתאימים

(A_i, B_i) ניתן לקבל יחס שאינו תלוי בזמן, כלומר

התנועה תהיה באחד משני אופני התנועה העצמיים.

שאלה 2



$$\vec{k}_1 = (k_x, k_y, k_z)$$
$$\vec{k}_2 = (-k_x, k_y, k_z)$$
$$\vec{k}_3 = (k_x, -k_y, k_z)$$
$$\vec{k}_4 = (-k_x, -k_y, k_z)$$

$|a| = |b| = |c| = |d| = E_0 \quad k_z z - \omega t = f$ נגדיר לכל הגלים

$$\Psi = a\cos(k_x x + k_y y + f) + b\cos(k_x x - k_y y + f) +$$
$$+ c\cos(-k_x x + k_y y + f) + d\cos(-k_x x - k_y y + f)$$

$$\Psi(x=0, y, z) = 0 \Rightarrow (a+c)\cos(k_y y + f) + (b+d)\cos(-k_y y + f) = 0$$

$b = -d \quad , a = -c \quad \Leftarrow z$ נכון לכל

$$\Psi(x, y=0, z) = 0 \Rightarrow (a+b)\cos(k_x x + f) + (c+d)\cos(-k_x x + f) = 0$$

$b = -a \quad , c = -d \quad \Leftarrow z$ נכון לכל

$$\Rightarrow \Psi(x,y,z) = E_0\Big[\cos(k_x x + k_y y + f) - \cos(k_x x - k_y y + f) -$$
$$- \cos(-k_x x + k_y y + f) + \cos(-k_x x - k_y y + f)\Big] =$$
$$= -2E_0\Big[\sin(k_x x + f)\sin(k_y y) +$$
$$- \sin(-k_x x + f)\sin(k_y y)\Big] =$$
$$= -2E_0 \sin k_y y \cdot 2\cos f \sin k_x x$$
$$\Psi(x,y,z) = -4E_0 \sin k_x x \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t)$$

$$\Psi(x=L, y, z) = 0 \Rightarrow k_x L = \pi n \, , \; n = 1, 2, \ldots$$
$$k_x = \frac{\pi n}{L}$$
$$\Psi(x, y=L, z) = 0 \Rightarrow k_y L = \pi m$$
$$k_y = \frac{\pi m}{L} \, , \; m = 1, 2, \ldots$$

$\Psi(x,y,z)$ מקיים: לכן עומד בתנאים x,y.

ב) יחס הנפיצה:

$$\omega^2 = c^2\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) =$$

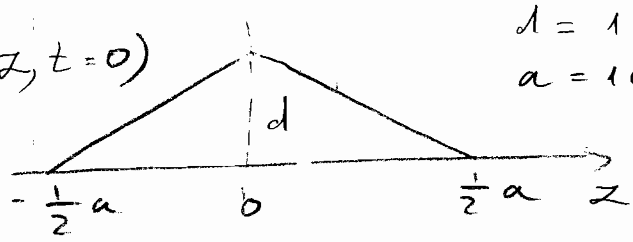
$$= c^2\underbrace{\left(\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + k_z^2\right)}_{k^2}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + k_z^2}}{k_z} \equiv \frac{ck}{k_z}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c\frac{k_z}{\sqrt{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + k_z^2}} = \frac{ck_z}{k}$$

שאלה 3

$f(z, t=0)$



$d = 1\,m$
$a = 100\,m$

א) בזמן $t=0$
ונקודת ה $x=0$ אמצע
הבסיס מלמטה נתון.

$$F(k) = \int f(z, t=0)\, e^{-ikz}\, dz =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}a}^{0} \left(\frac{2d}{a}z + d\right) e^{-ikz} dz + \int_{0}^{\frac{1}{2}a} \left(-\frac{2d}{a}z + d\right) e^{-ikz} dz =$$

$$= \frac{8d}{ak^2} \sin^2 \frac{ak}{4}$$

ב) $\lambda = 100\,m$, $h >> \lambda \Leftarrow$ מים עמוקים

$$\omega^2 = k\left[g + \left(\frac{\sigma k^2}{\rho}\right)\right] \tanh kh$$

$\sigma = 0.073\ N/m \qquad \rho = 1000\ kg/m^3 \quad , \; g \simeq 9.8\ \frac{N}{kg}$

$$\frac{\sigma k^2}{\rho} = \frac{\sigma\, 4\pi^2}{\lambda^2 \rho} = 2.9 \cdot 10^{-7}\ \frac{N}{\cancel{m}} \frac{m^3}{\cancel{m^2}\, kg} << g$$

$$kh = \frac{2\pi h}{\lambda} >> 1 \Rightarrow \tanh kh \simeq 1$$

$$\Rightarrow \omega^2 \simeq kg$$

$$\omega \simeq \sqrt{kg} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

$$v_g \simeq 6.2\ m/s$$

ג) גלי מים עמוקים:

$$\psi_y(y,z,t) = \sum_k A_k \frac{\sinh k(h+y)}{\sinh kh} \cos(kz-\omega(k)t)$$ הרכיב האנכי של הגל

$$\psi_z(y,z,t) = \sum_k A_k \frac{\cosh k(h+y)}{\sinh kh} \sin(kz-\omega(k)t)$$ הרכיב האופקי של הגל

הגלים שנוצרו הם על פני המים, לכן $y=0$.

$$\psi_y(z,t) = \sum_k A_k \cos(kz-\omega(k)t)$$

$$\psi_z(z,t) = \sum_k A_k \coth kh \sin(kz-\omega(k)t)$$

מים עמוקים $\coth kh \simeq 1$

מסעיף ב: $A_k = F(k) = \frac{8d}{ak^2} \sin^2 \frac{ak}{4}$

(2

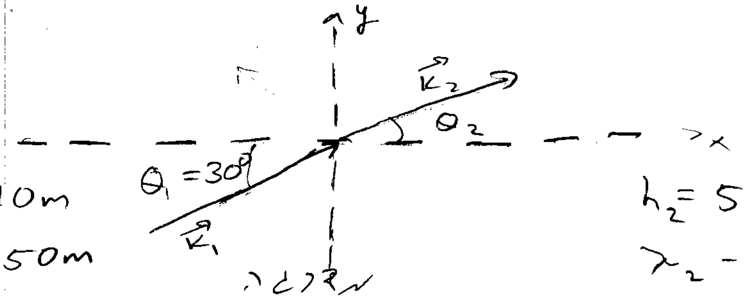
$h_1 = 10m$

$\lambda_1 = 50m$

$h_2 = 5m$

λ_2 - ?

θ_2 - ?



⇓

$$\omega_1 \approx \sqrt{kg\tanh(kh)} \approx 1.05\ Hz = \omega_2 = \omega$$

$$k_{2y} = k_{1y} = k_1 \sin\theta_1$$

$$k_{2x} = \sqrt{k_2^2 - k_{2y}^2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_1}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{k_{2y}}{k_{2x}} = \frac{k_1 \sin\theta_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_1}}$$

בהנחה שהמים אחרי המדרגה רדודים

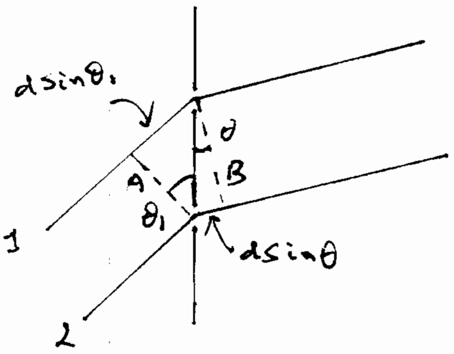
$$\omega^2 \approx k_2^2 g h$$

$$k_2 \approx \frac{\omega}{\sqrt{gh}} \approx 0.15\ \frac{1}{m} \Rightarrow \underline{\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} \approx 42\ m}$$

$$\Rightarrow \tan\theta_2 \approx 0.46$$

$$\underline{\theta_2 \approx 24.76°}$$

4) א.



$d\sin\theta_1$ מוסיף דרך לקרן 1

$d\sin\theta$ מוסיף דרך לקרן 2

נגדיר φ_0 פאזה התחלתית גל בנק' A

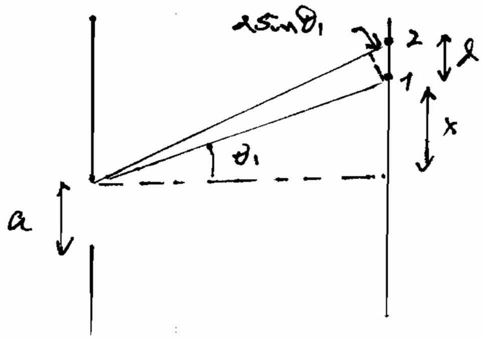
$r=0$ תחילת של גל ובנק' B

סכום הגלים בכיוון r מהצורה

$$A\cos(\varphi_0 + kr - \omega t + kd\sin\theta_1) + B\cos(\varphi_0 + kr - \omega t + kd\sin\theta)$$

$\Leftarrow$ הפרש הפאזות $kd(\sin\theta_1 - \sin\theta)$

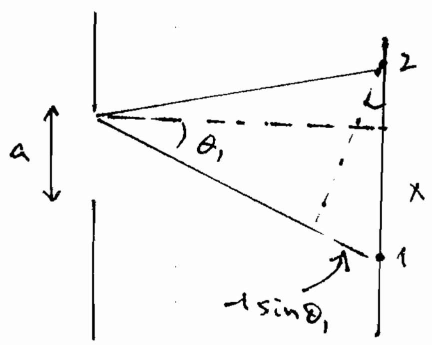
עבור $\theta=0$ התאבכות הורסת כאשר $\pi(2n+1) = kd\sin\theta_1$, n שלם.



ב. נניח נקודה עליונה בסדק a מרחק x מתחת לסדק 1. סכום הנקודות ב-a נותן

$\theta_1^{max} = \frac{x+a}{L}$ $\theta_1^{min} = \frac{x}{L}$ (זוויות קטנות)

ולכן התפלגות ברוחב $\Delta\theta_1 = a/L$



אם נקודה עליונה בסדק a מרחק x מעל סדק 1

$\theta_1^{max} = \frac{x}{L}$, $\theta_1^{min} = \frac{x-a}{L}$

ושוב רוחב כנ"ל $\Delta\theta_1 = a/L$

הגלים היוצאים מהסדקים 1,2 הם כמו

מקור אחד עם פאזה יחסית $kd\sin\theta_1$. כאשר

מסכמים על נקודות המוצא בסדק a המקדמים A,B נותנים את תמונת

ההתאבכות של סדק ברוחב a. השאלה היא לגבי הפאזה היחסית $kd\sin\theta_1$

שההתפלגות שלה תגרום לאבוד תמונת ההתאבכות אלא אם

$$\Delta(kd\sin\theta_1) \ll 2\pi \Rightarrow kd\cdot\frac{a}{L} \ll 2\pi \Rightarrow da \ll \lambda L$$

הערה: התוצאה אינה קשורה בהכרח להמצאות 2 הסדקים בתוך השיא המרכזי של הפיזור מ-a, אם כי התוצאה זהה כאשר $x \approx d$.

שאלה 5

לפוטון בשדה כבידה (חלש) אנרגיה: $U = -\frac{GME}{rc^2} = -\frac{GMh\nu}{rc^2}$

אנרגיה התחלתית של הפוטון הנפלט:

$$E_i = h\nu_1 - \frac{GM_1 h\nu_1}{R_0 c^2} - \frac{GM_2 h}{(R-R_0)}\frac{\nu_1}{c^2}$$

אנרגיה סופית של הפוטון בזמן שהוא ליד M_2:

$$E_f = h\nu_2 - \frac{GM_2 h\nu_2}{R_0 c^2} - \frac{GM_1 h\nu_2}{(R-R_0)c^2}$$

$$E_i = E_f$$

$$0 = h(\nu_1 - \nu_2) - \frac{GM_1 h}{c^2}\left(\frac{\nu_1}{R_0} - \frac{\nu_2}{(R-R_0)}\right) - \frac{GM_2 h}{c^2}\left(\frac{\nu_1}{(R-R_0)} - \frac{\nu_2}{R_0}\right)$$

$\nu_1 = \nu \qquad \nu_2 = \nu + \Delta\nu$

$$\Delta\nu = -\frac{G}{c^2}\left[\frac{M_1(R\nu - R_0\nu - R_0\nu - R_0\Delta\nu) + M_2(\cancel{R_0\nu} - R\nu - R\Delta\nu + \cancel{R_0\nu} + R_0\Delta\nu)}{R_0(R-R_0)}\right]$$

$$\Delta\nu = \alpha\nu$$

$$\alpha = -\frac{G}{c^2 R_0(R-R_0)}\left[M_1(R - 2R_0 - R_0\alpha) + M_2(R_0\alpha - R\alpha - R)\right]$$

$$\frac{\alpha}{M_2} = -\frac{G}{c^2 R_0(R-R_0)}\left[\frac{M_1}{M_2}(R - 2R_0 - R\alpha) + (R_0\alpha - R\alpha - R)\right]$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{-\frac{c^2 R_0(R-R_0)}{G}\frac{\alpha}{M_2} - (R_0\alpha - R\alpha - R)}{R - 2R_0 - R\alpha}$$