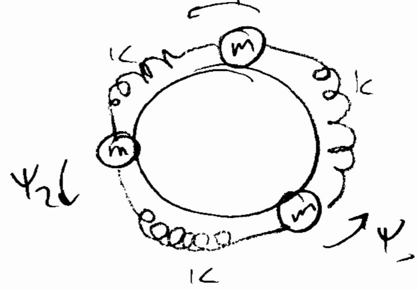


א) למערכת שיש בה 3 גופים, ישנן רק שתי תדירויות עצמיות

בגלל תנאי השפה המחזוריים.

אופן תנודה אחד יהיה כאשר כל המסות נעות ביחד באותו כיוון ואז

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. התדירות האופיינית תהיה 0.

אופן תנודה שני - אחת המסות במנוחה ושתי המסות האחרות

נעות בכיוונים מנוגדים $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$.

אופן תנודה שלישי - $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\omega_3^2 = \frac{3k}{m}$

ב) משוואות התנועה:

$$\begin{cases} m\ddot{\Psi}_1 = -k(\Psi_1 - \Psi_2) - k(\Psi_1 - \Psi_3) \\ m\ddot{\Psi}_2 = -k(\Psi_2 - \Psi_1) - k(\Psi_2 - \Psi_3) \\ m\ddot{\Psi}_3 = -k(\Psi_3 - \Psi_1) - k(\Psi_3 - \Psi_2) \end{cases}$$

ג)

$$\begin{pmatrix}\ddot{\Psi}_1\\ \ddot{\Psi}_2\\ \ddot{\Psi}_3\end{pmatrix} + \frac{k}{m}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & -1\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0 = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) + (-2+\lambda-1) - (1+2-\lambda)$$

$$(2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) + 2\lambda - 6 = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 2(\lambda-3) = 0$$

$$(3-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2-2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \qquad \lambda_3 = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \omega^2 = 3\frac{k}{m} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

ל-3 ישנן שני ו"ע ניצבים זה לזה - $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ וכל אחד מהם ניצב גם ל-$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

הפתרון הכללי למיקום המסות

$$\vec{x}(t) = a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(t+b) + a_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_2\right) + a_3\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_3\right)$$

שאלה 2

סריג סקיפה.

$$d \sin \theta_m = m \lambda$$

מרחק בין שני חריצים סמוכים

זווית של המקסימום מסדר m

סריג S1:

נתון: $\phi = 15^\circ$, $d_1 = 10 \mu m$

$$\begin{cases} d_1 \sin \phi = n \lambda_1 \\ d_1 \sin \phi = (n+1) \lambda_2 \end{cases}$$

סריג S2:

נתון: $\theta_1 = 19^\circ$, $\theta_2 = 16.2^\circ$, $m = 1$

$$d_2 \sin \theta_1 = m \lambda_1$$
$$d_2 \sin \theta_2 = m \lambda_2$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

$$\frac{n+1}{n} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin 19^\circ}{\sin 16.2^\circ}$$

$$\Rightarrow n = 6$$

$$\lambda_1 = \frac{d_1 \sin \phi}{n} \approx 431 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = \frac{d_2 \sin \phi}{n+1} \approx 370 \text{ nm}$$

$$d_2 = 1.32 \mu m$$

שאלה 3

גל שהגל מתקדם בכיוון ציר $\hat{z}$.

$$\hat{\Psi}_R(z,t) = \cos(\omega t - K_1 z)\hat{x} + \sin(\omega t - K_1 z)\hat{y}$$ קיטוב מעגלי ימני

$$\hat{\Psi}_L(z,t) = \cos(\omega t - K_2 z)\hat{x} - \sin(\omega t - K_2 z)\hat{y}$$ קיטוב מעגלי שמאלי

נתון כי לאחר שהגל עובר בחומר $l = 1cm$, הפאזה היחסית משתנה ב- $\pi/12$, כלומר:

$$(\omega t - K_1 l) - (\omega t - K_2 l) = \pi/12$$

$$l(K_2 - K_1) = \pi/12$$

$$K_2 = K_1 + \pi/12l$$

$$\Rightarrow \hat{\Psi}_L(z,t) = \cos(\omega t - K_1 z - \tfrac{\pi}{12l}z)\hat{x} - \sin(\omega t - K_1 z - \tfrac{\pi}{12l}z)\hat{y}$$

א) נתון גל מקוטב לינארית (גל בכיוון $\hat{x}$. לצורך הפשטות)

$$\vec{\Psi} = B\cos(\omega t - K_1 z)\hat{x}$$

הגל מתקדם בחומר הנתון מ- $z = 0$ עד $z = d$

ב- $z = 0$ ניתן להציג את הגל כסכום של $\vec{\Psi}_R$, $\vec{\Psi}_L$

$$\vec{\Psi}(z=0,t) = \frac{1}{2}B(\hat{\Psi}_R + \hat{\Psi}_L)$$

לכן, עבור $z = d$:

$$\vec{\Psi}(z=d,t) = \frac{1}{2}B\Big(\cos(\omega t - Kd)\hat{x} + \sin(\omega t - Kd)\hat{y} + \cos(\omega t - Kd - \tfrac{\pi}{12}\tfrac{d}{l})\hat{x} - \sin(\omega t - Kd - \tfrac{\pi}{12}\tfrac{d}{l})\hat{y}\Big)$$

לפי הדרישה שהקיטוב יהיה ב-45°: $\rightarrow = \frac{B'}{\sqrt{2}}\big(\hat{x}\cos(\omega t - Kd) + \hat{y}\cos(\omega t - Kd)\big)$

* ל-B' יכולה להיות גם פאזה ($B' = Be^{i\alpha}$).

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\cos(\omega t - Kd) + \cos(\omega t - Kd - \frac{\pi}{12}\frac{d}{l})\right) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - Kd) \\ \frac{1}{2}\left(\sin(\omega t - Kd) - \sin(\omega t - Kd - \frac{\pi}{12}\frac{d}{l})\right) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - Kd) \end{cases}$$

$$\cos(\omega t - Kd - \tfrac{\pi}{24}\tfrac{d}{l})\cos(\tfrac{\pi}{24}\tfrac{d}{l}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - Kd)$$

$$\cos(\omega t - Kd - \tfrac{\pi}{24}\tfrac{d}{l})\sin(\tfrac{\pi}{24}\tfrac{d}{l}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - Kd)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{24}\frac{d}{l} = \cos\frac{\pi}{24}\frac{d}{l} \Rightarrow \frac{\cancel{\pi}}{24}\frac{d}{l} = \frac{\cancel{\pi}}{4} + \cancel{\pi}n \quad , n = 0,1,2,\ldots$$

$$\underline{d = 6l + 24ln}$$

$$\Downarrow$$

$$d = 6\,cm,\ 30\,cm,\ 54\,cm, \ldots$$

ג) כאן נתון $d=6\ell$

ב- $z=0$ העוצמה 1

ב- $z=\ell$ העוצמה α

ב- $z=2\ell$ העוצמה α^2

$\vdots$

$$I=\alpha^{z/\ell}$$

$$\hat{\Psi}_L=\alpha^{z/2\ell}\left(\cos(\omega t-kz)\hat{x}-\sin(\omega t-kz)\hat{y}\right)$$

$$\vec{\Psi}(z,t)=B\cos(\omega t-kz)\hat{x}$$

$$\vec{\Psi}(z=0,t)=\frac{1}{2}B\left(\hat{\Psi}_R+\hat{\Psi}_L\right)$$

$$\vec{\Psi}(z=d,t)=\frac{1}{2}B\left(\cos(\omega t-kd)\hat{x}+\sin(\omega t-kd)\hat{y}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}B\alpha^{d/2\ell}\left(\cos(\omega t-kd)\hat{x}-\sin(\omega t-kd)\hat{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}B\left(1+\alpha^{d/2\ell}\right)\cos(\omega t-kd)\hat{x}+$$

$$+\frac{1}{2}B\left(1-\alpha^{d/2\ell}\right)\sin(\omega t-kd)\hat{y}$$

$$d=6\ell$$

$$\Rightarrow \vec{\Psi}(z=6\ell,t)=\frac{1}{2}B\left(1+\alpha^3\right)\cos(\omega t-6k\ell)\hat{x}+$$

$$+\frac{1}{2}B\left(1-\alpha^3\right)\sin(\omega t-6k\ell)\hat{y}$$

זהו קיטוב אליפטי.

שאלה 5

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - g\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$\Psi(x,y,t) = f(y)e^{i(kx-\omega t)}$$

1) נתון

נציב את $\Psi(x,y,t)$ לתוך המשוואה:

$$-\omega^2 f(y)e^{i(kx-\omega t)} = -v^2k^2 f(y) e^{i(kx-\omega t)} - g\frac{df}{dy}e^{i(kx-\omega t)} \quad (*)$$

$$f(y)\left(v^2k^2-\omega^2\right) = -g\frac{df}{dy}$$

$$f(y) = Ae^{-\beta y}$$

(נסמן ב-β שנקבע מתנאי שפה)

$$\Rightarrow \omega^2 e^{-\beta y} = v^2k^2 e^{-\beta y} + \beta g e^{-\beta y}$$

נתון: $\nabla^2\Psi = 0$

$$\nabla^2\Psi = \left(-k^2+\beta^2\right)\Psi = 0 \Rightarrow \beta = \pm k$$

$$\omega^2(k) = v^2k^2 \pm gk$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{v^2k^2 \pm kg}}{k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2kv^2 \pm g}{2\sqrt{v^2k^2-\beta g}}$$

2) עבור גל דועך $\beta > 0$, לכן כאשר

$$v^2k_c^2 - k_c g = 0$$

v_g מתבדר.

$$k_c = \frac{g}{v^2} \Rightarrow \lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi v^2}{g}$$

$$\omega_c = \sqrt{v^2k_c^2 - k_c g} = 0$$

ננסה פתרון מהצורה:

$$(**)\ \Psi(x,y,t) = Ae^{-k_c y}e^{ik_c x}(\omega t + B)$$

ונציב לתוך המשוואה:

$$0 = -v^2k_c^2\Psi + gk_c\Psi$$

אז קיבלנו $v^2k^2 = gk_c$

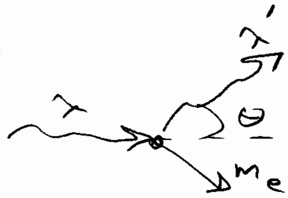
הערה: הפתרון $(**)$ מתקבל מהפרדת משתנים:

$$\Psi(x,y,t) = f(y)X(x)T(t)$$

שאלה 5

נוסחת קומפטון:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$



אנרגיית פוטון

$$E = pc = \frac{h}{\lambda} c$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{h}c}{E'} - \frac{\cancel{h}c}{E} = \frac{\cancel{h}}{m\cancel{c}}(1-\cos\theta)$$

אם $E \gg mc^2, \theta \simeq \pi$ $\Leftarrow$

$$\frac{c}{E'} - \frac{c}{E} \simeq \frac{2}{mc}$$

$$\frac{c}{E'} \simeq \frac{2}{mc} + \frac{c}{E} = \frac{2E + mc^2}{mc \cdot E} \simeq \frac{2\cancel{E}}{mc\cancel{E}} = \frac{2}{mc}$$

$$\underline{E' \simeq \frac{1}{2} mc^2}$$

E' - אינה תלויה ב-E !