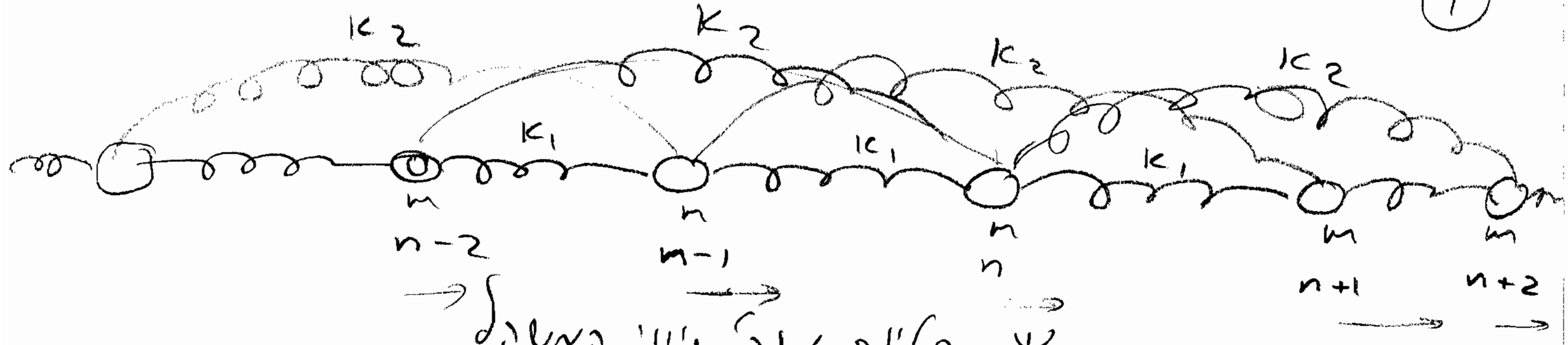


Ψ_n - סטיית מנק' שיווי המשקל

$$m\ddot{\Psi}_n = +K_1(\Psi_{n+1}-\Psi_n)+K_1(\Psi_{n-1}-\Psi_n)+K_2(\Psi_{n+2}-\Psi_n)+K_2(\Psi_{n-2}-\Psi_n)$$

$$m\ddot{\Psi}_n = -2(K_1+K_2)\Psi_n + K_1\Psi_{n+1}+K_1\Psi_{n-1}+K_2\Psi_{n+2}+K_2\Psi_{n-2}$$

ננסה פתרון מהצורה:

$$\Psi_n = Ae^{i(kna-\omega t)}$$

$$-m\omega^2 = -2(K_1+K_2)+K_1e^{ika}+K_1e^{-ika}+K_2e^{2ika}+K_2e^{-2ika}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m}\left[2(K_1+K_2)-2K_1\cos ka-2K_2\cos 2ka\right] =$$

$$= \frac{2}{m}\left[K_1(1-\cos ka)+K_2(1-\cos 2ka)\right] =$$

$$= \frac{4}{m}\left[K_1\sin^2\frac{ka}{2}+K_2\sin^2 ka\right]$$

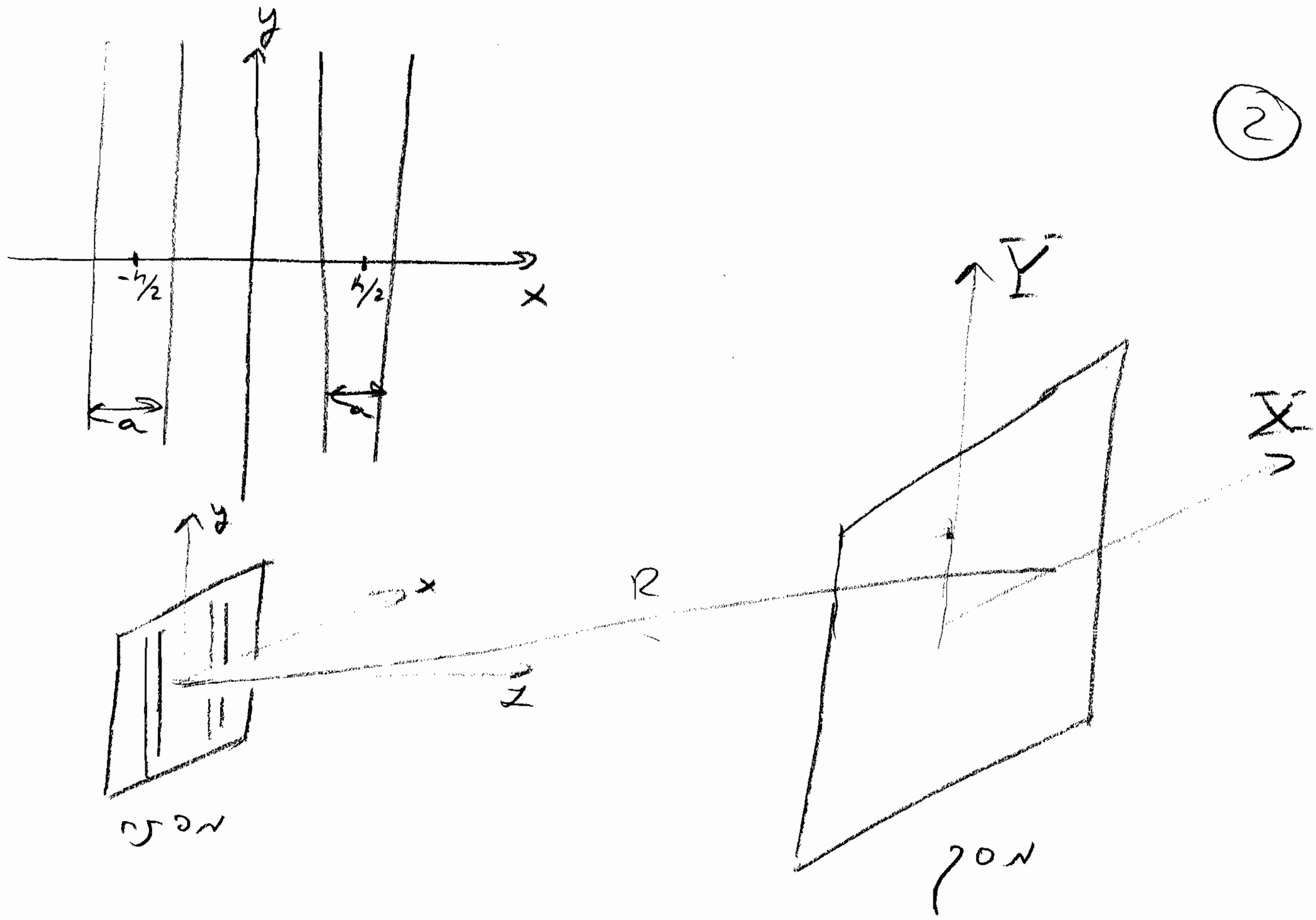
$$\omega = \frac{2}{\sqrt{m}}\sqrt{K_1\sin^2\frac{ka}{2}+K_2\sin^2 ka}$$

יחס הנפיצה

* אם כל מסה מקושרת לכל j השכנים שלה מכל צד ע"י קפיץ K_n

יחס הנפיצה יהיה

$$\omega^2 = \frac{4}{m}\sum_{n=1}^{j} K_i\sin^2\frac{nka}{2}$$



נניח ללא הגבלת הכלליות כי כיוון המקטב ב- $x=-h/2$ הוא $\hat{x}$ ואילו
כיוון המקטב ב- $x=h/2$ הוא $\cos\alpha\,\hat{x}+\sin\alpha\,\hat{y}$.

נרשום את פונקציית המפתח (חד-מימדית)

$$A(x)=E_0\begin{cases}\hat{x}, & -\frac{h}{2}-\frac{a}{2}<x<-\frac{h}{2}+\frac{a}{2}\\ \cos\alpha\,\hat{x}+\sin\alpha\,\hat{y}, & \frac{h}{2}-\frac{a}{2}<x<\frac{h}{2}+\frac{a}{2}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

צורת תבנית ההתאבכות לא תהיה תלויה ב- Y בגלל הסימטריה.
נחשב את השדה באיזור המסך בעזרת טרנס' פוריה עבור כל
רכיב קיטוב בנפרד.

$$E_x=E_0\int_{-\frac{h}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{h}{2}+\frac{a}{2}}e^{ik_x x}\,dx+\int_{\frac{h}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{h}{2}+\frac{a}{2}}E_0e^{ik_x x}\cos\alpha\,dx=$$

$$=E_0\left(\frac{1}{ik_x}e^{-ik_x\frac{h}{2}}\left(e^{ik_x\frac{a}{2}}-e^{-ik_x\frac{a}{2}}\right)+\frac{\cos\alpha}{ik_x}e^{ik_x\frac{h}{2}}\left(e^{ik_x\frac{a}{2}}-e^{-ik_x\frac{a}{2}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow E_x = E_0 \frac{\cancel{2i} \sin \frac{k_x a}{2}}{\cancel{i} k_x} \left(e^{-ik_x \frac{h}{2}} + \cos\alpha \, e^{ik_x \frac{h}{2}} \right) =$$

$$= \frac{E_0 a}{2} \operatorname{sinc} \frac{k_x a}{2} \left(e^{-ik_x \frac{h}{2}} + \cos\alpha \, e^{ik_x \frac{h}{2}} \right)$$

$$E_y = E_0 \int_{\frac{h}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{h}{2}+\frac{a}{2}} \sin\alpha \, e^{ik_x x} dx = \frac{E_0 a}{2} \operatorname{sinc} \frac{k_x a}{2} \sin\alpha \, e^{ik_x \frac{h}{2}}$$

השדה הכולל הוא:

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$$

והעוצמה

$$I \sim \vec{E} \cdot \vec{E}^*$$

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{k_x a}{2} \left(1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \cos k_x h + \sin^2\alpha \right) =$$

$$= 2 I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{k_x a}{2} \left(1 + \cos\alpha \cos k_x h \right)$$

לפי הציור

$$k_x \equiv k \frac{X}{R} \simeq k \sin\theta$$

$$I = 2 I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{ka \sin\theta}{2} \right) \left(1 + \cos\alpha \cos(kh \sin\theta) \right)$$

* עבור $\alpha = 0$

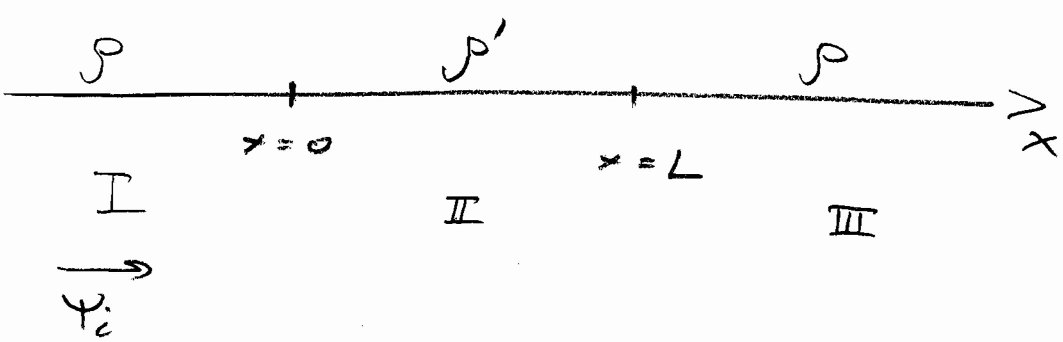
$$I(\alpha = 0) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{ka \sin\theta}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{kh \sin\theta}{2} \right)$$

הקיטוב זהה, ותבנית העקיפה היא כשני סדקים בגלל רוחב סופי (קונבולוציה של סדק ברוחב סופי ושתי פונקציות δ)

* $\alpha = \pi/2$

$$I(\alpha = \pi/2) = 2 I_0 \sin^2 \left(\frac{ka \sin\theta}{2} \right)$$

שני הקיטובים ניצבים ולא מתאבכים אחד עם השני, ותבנית העקיפה זהה נוצרת מכל אחד מהסדקים בנפרד, ותבנית העקיפה הסופית היא הסכום שלהן.



נרשום את הגלים בכל אחד מהאיזורים:

$$\Psi_1 = e^{i(\omega t - k_1 x)} + R\, e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

$$\Psi_2 = F e^{i(\omega t - k_2 x)} + B e^{i(\omega t + k_2 x)}$$

$$\Psi_3 = C e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

$R = 0$
(אין גל חוזר)

מהירות הפאזה:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = v_3 \qquad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho'}}$$

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = k_3 \qquad k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

תנאי שפה:

$$\begin{cases} \Psi_1(x=0) = \Psi_2(x=0) \\ \Psi_2(x=L) = \Psi_3(x=L) \\ T\left.\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = T\left.\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \\ T\left.\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial x}\right|_{x=L} = T\left.\dfrac{\partial \Psi_3}{\partial x}\right|_{x=L} \end{cases}$$

נפתור את המשוואות: $(R = 0)$

$$\begin{cases} 1 = F + B \Rightarrow F = 1 - B \\ (1-B)e^{-ik_2L} + B e^{ik_2L} = C e^{-ik_1L} & (2) \\ -ik_1 = -ik_2(1-B) + ik_2 B & (3) \\ -\cancel{i}k_2(1-B)e^{-ik_2L} + \cancel{i}k_2 B e^{ik_2L} = -\cancel{i}k_1 C e^{-ik_1L} & (5) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow -k_1 = -k_2 + k_2 B + k_2 B \Rightarrow B = \frac{k_2 - k_1}{2k_2}$$

$$(2) \rightarrow C e^{-ik_1 L} = e^{-ik_2 L} + B\left(e^{ik_2 L} - e^{-ik_2 L}\right)$$

$$(5) \rightarrow -k_2 e^{-ik_2 L} + B k_2 e^{-ik_2 L} + k_2 B e^{ik_2 L} = -k_1 C e^{-ik_1 L}$$

$$-k_2 e^{-ik_2 L} + B k_2 \left(e^{ik_2 L} + e^{-ik_2 L}\right) = -k_1 C e^{ik_1 L}$$

$$-k_2 e^{-ik_2 L} + \frac{k_2 - k_1}{2\cancel{k_2}} \cancel{k_2} \left(e^{ik_2 L} + e^{-ik_2 L}\right) = -k_1 \left(e^{-ik_2 L} + \frac{k_2 - k_1}{2k_2}\left(e^{ik_2 L} - e^{-ik_2 L}\right)\right)$$

$$-k_2 e^{-ik_2 L} + \frac{1}{2} k_2 e^{ik_2 L} + \frac{1}{2} k_2 e^{-ik_2 L} \cancel{- \frac{1}{2} k_1 e^{ik_2 L}} \cancel{- \frac{1}{2} k_1 e^{-ik_2 L}} =$$

$$= \cancel{-k_1 e^{-ik_2 L}} \cancel{- \frac{1}{2} k_1 e^{ik_2 L}} \cancel{+ \frac{1}{2} k_1 e^{-ik_2 L}} + \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{k_2} e^{ik_2 L} - \frac{1}{2} \frac{k_1^2}{k_2} e^{-ik_2 L}$$

$$-2k_2^2 e^{-ik_2 L} + k_2^2 e^{ik_2 L} + k_2^2 e^{-ik_2 L} = k_1^2 e^{ik_2 L} - k_1^2 e^{-ik_2 L}$$

$$e^{ik_2 L}\left(k_2^2 - k_1^2\right) = e^{-ik_2 L}\left(k_2^2 - k_1^2\right)$$

$$e^{ik_2 L} = e^{-ik_2 L} \qquad \Leftarrow k_1 \neq k_2 \Leftarrow \rho \neq \rho'$$

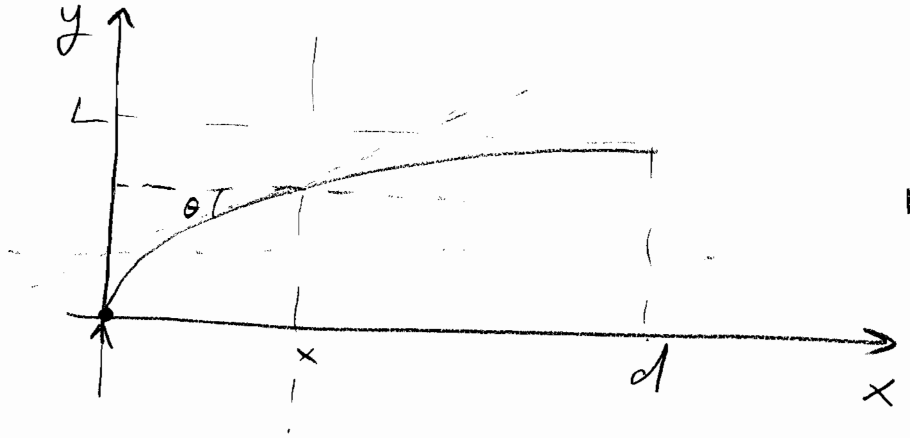
$$e^{2ik_2 L} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos(2k_2 L) = 1 \\ \sin(2k_2 L) = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad 2k_2 L = 2\pi n, \quad k_2 = \frac{\pi n}{L}$$

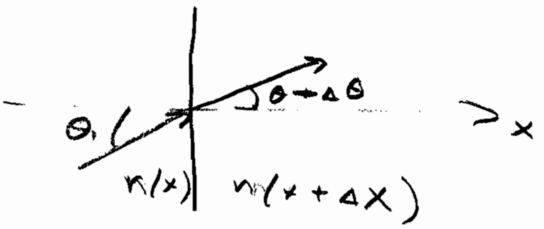
$$\omega = v_2 k_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho'}} \frac{\pi n}{L}$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \sqrt{\frac{\cancel{T}}{\rho'}} \frac{\pi n}{L} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\cancel{T}}} = \frac{2\pi}{\lambda_1}$$

$$\underline{\lambda_1 = \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} \frac{2L}{n}}$$



$$n(x) = 1 + \alpha x$$



$$n(x)\sin\theta = n(x+\Delta x)\sin(\theta-\Delta\theta) = (n(x)+n'\Delta x)(\sin\theta + \Delta\theta\cos\theta) =$$

$$= n(x)\sin\theta + n(x)\Delta\theta\cos\theta + n'\Delta x\sin\theta$$

$$n(x)\,d\theta\cos\theta = -n'(x)\,dx\sin\theta$$

$$d\theta = -\frac{n'}{n}\tan\theta\,dx = -\frac{\alpha}{1+\alpha x}\tan\theta\,dx$$

$$\int\frac{d\theta}{\tan\theta} = -\int\frac{\alpha}{1+\alpha x}\,dx$$

$$\ln(\sin\theta) = -\ln(1+\alpha x) + \tilde{C}$$

$$\sin\theta = \frac{C}{1+\alpha x}$$

תנאי התחלה: ב- $x=0$ $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$ $C=1$

$$\sin\theta = \frac{1}{1+\alpha x}$$

מהבנייה ניתן לראות כי $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$

$$y' = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{(1+\alpha x)^2}}{1-\frac{1}{(1+\alpha x)^2}}} = \sqrt{\frac{\cancel{\frac{1}{(1+\alpha x)^2}}}{\frac{(1+\alpha x)^2-1}{\cancel{(1+\alpha x)^2}}}} = \sqrt{\frac{1}{(1+\alpha x)^2-1}}$$

$$y = \int_0^d \frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha x)^2-1}} = \left| \begin{array}{l} \xi = 1+\alpha x \\ d\xi = \alpha\, dx \end{array} \right| = \frac{1}{\alpha}\int_1^{1+\alpha d} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \ln\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right)\Big|_1^{1+\alpha d} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\ln\left(1+\alpha d - \sqrt{(1+\alpha d)^2-1}\right) - \ln 1\right) =$$

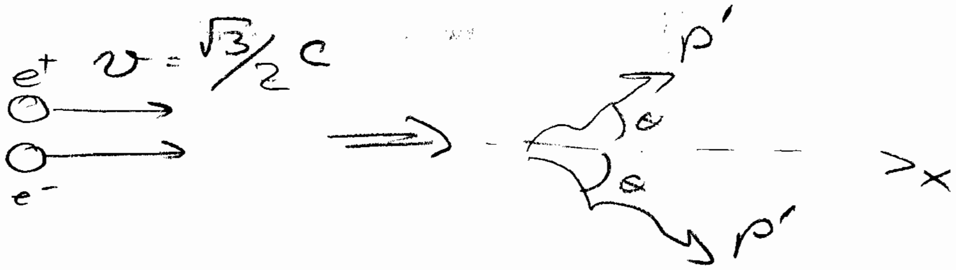
$$= \frac{1}{\alpha} \ln\left(1+\alpha d - \sqrt{\alpha^2 d^2 - 2\alpha d}\right)$$

זוכה אתכן!

$$y = \frac{1}{\alpha}\int_1^{1+\alpha d} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} = \frac{1}{\alpha}\cosh^{-1}(\xi)\Big|_1^{1+\alpha d} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cosh^{-1}(1+\alpha d)$$

5



נתייחס לאלקטרון ופוזיטרון כאל חלקיק אחד במסה 2m
ותנע p.

שימור תנע בציר x:

$$p = 2p'\cos\theta$$

שימור אנרגיה:

$$\sqrt{p^2c^2 + (2m)^2c^4} = 2p'c$$

$$p^2\cancel{c^2} + 4m^2c^{\cancel{4}\,2} = 4p'^2\cancel{c^2}$$

$$p^2 + 4m^2c^2 = \cancel{4}\frac{p^2}{\cancel{4}\cos^2\theta}$$

$$p^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) = 4m^2c^2$$

$$p^2\tan^2\theta = 4m^2c^2$$

$$p = \frac{2mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \frac{\cancel{4m^2}v^2}{1 - v^2/c^2}\tan^2\theta = \cancel{4m^2}c^2$$

$$\beta = v/c$$

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\tan^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta = \frac{1-\beta^2}{\beta^2} = \frac{1 - 3/4}{3/4} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

$$\tan\theta = 1/\sqrt{3}$$

$$\boxed{\theta = 30^\circ}$$