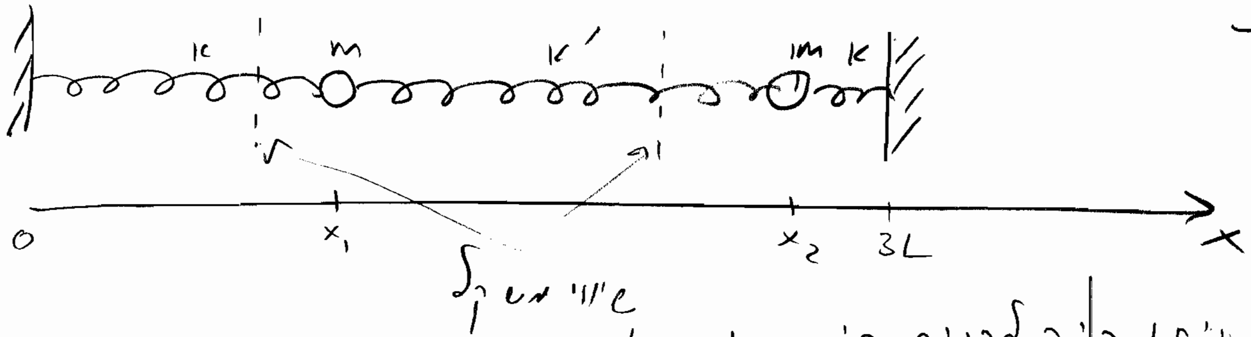
שאלה 1

א



הערה: ניתן היה להניח כי $L=L_0$

משוואות התנועה:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1-L_0)+k'(x_2-x_1-L_0)+\mu(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2-(3L-L_0))-k'(x_2-x_1-L_0)-\mu(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \end{cases}$$

* ההתארכות של הקפיץ הימני היא $L_0-(3L-x_2)$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = (-k-k')x_1+k'x_2+\mu(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+kL_0-k'L_0 \\ m\ddot{x}_2 = k'x_1+(-k-k')x_2+\mu(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k(3L-L_0)+k'L_0 \end{cases}$$

מתוך הסימטריה של הבעיה ניתן לנחש כי אופני התנודה הם:

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ באותו כיוון עם אותה משרעת או $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ בכיוונים מנוגדים עם אותה משרעת

לכן:

$$m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) = -k(x_1+x_2)+\cancel{kL_0}-\cancel{k'L_0}+3kL-\cancel{kL_0}+\cancel{k'L_0}$$

$$m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) = (-k-2k')(x_1-x_2)+2\mu(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+kL_0-k'L_0-3kL+kL_0-k'L_0$$

$$y_1 \equiv x_1+x_2 \qquad \omega^2 \equiv k/m \qquad \Gamma \equiv \mu/m$$

$$y_2 \equiv x_1-x_2 \qquad \omega'^2 \equiv k'/m$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\omega^2 y_1 + \frac{3kL}{m} \\ \ddot{y}_2 = -(\omega^2+2\omega'^2)y_2 - 2\Gamma\dot{y}_2 + \frac{2(k-k')L_0-3kL}{m} \end{cases}$$

$$Y_1 \equiv y_1 - A$$

$$Y_2 \equiv y_2 - B$$

$$\ddot{Y}_1 = -\omega^2 Y_1 - \omega^2 A + \frac{3kL}{m}$$

$$\ddot{Y}_2 = -(\omega^2+2\omega'^2)Y_2 - (\omega^2+2\omega'^2)B - 2\Gamma\dot{Y}_2 + \frac{2(k-k')L_0-3kL}{m}$$

(נכוס:

$$-\omega^2 A + 3\omega^2 L = 0 \Rightarrow \underline{A = 3L}$$

$$-(\omega^2 + 2\omega'^2)B + 2(\omega^2 - \omega'^2)L_0 - 3\omega^2 L = 0$$

$$\underline{B = \frac{2(\omega^2 - \omega'^2)L_0 - 3\omega^2 L}{\omega^2 + 2\omega'^2}}$$

לפי מש' התנועה בקואורדינטות נורמליות:

$$\begin{cases} \ddot{Y}_1 = -\omega^2 Y_1 \\ \ddot{Y}_2 + 2\Gamma \dot{Y}_2 + (\omega^2 + 2\omega'^2) Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \\ Y_2(t) = B e^{-\Gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta) \end{cases} \qquad \omega_1^2 = \omega^2 + 2\omega'^2 - \Gamma^2$$

ב) בהעדר כוח החיכוך התדירויות העצמיות הן:

$$\omega_A^2 = \frac{k}{m} \quad \text{for} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_B^2 = \frac{k}{m} + 2\frac{k'}{m} \quad \text{for} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ג) ניתן לראות שאופן התנודה $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אינו דועך ואופן התנודה $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ דועך עם זמן דעיכה אופייני $\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{m}{\mu}$. מזמן $t=0$ נתונה תנועה לשהי שהיא סופרפוזיציה של שני אופני התנודה הללו.
אחרי הרבה זמן $t \gg \tau$ אופן התנודה השני $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ידעך, והמסות ינועו ביחד באותו הכיוון עם אותה אמפליטודה הלוך וחזור.
תדירות התנודות תהיה $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (והקפיץ האמצעי לא ישנה את האורך שלו)

שאלה 2

(א) פתרון כללי של מש' הגלים

$$\Psi(x,t) = \cos(\omega t + \varphi)\left(A\cos kx + B\sin kx\right)$$

תנאי השפה

$$\Psi(x=0,t) = \Psi(x=L,t) = 0$$

$$\Psi(x=0,t) = A\cos(\omega t+\varphi)\cos kx = 0 \qquad A = 0$$

$$\Psi(x=L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0$$

$$k_n = \frac{\pi}{L} n$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \varphi_n) \qquad \omega = vk$$

שתי התדירויות הנמוכות הן:

$$\omega_1 = vk_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\,\frac{\pi}{L}$$

$$\omega_2 = vk_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\cdot 2\frac{\pi}{L}$$

(ב)

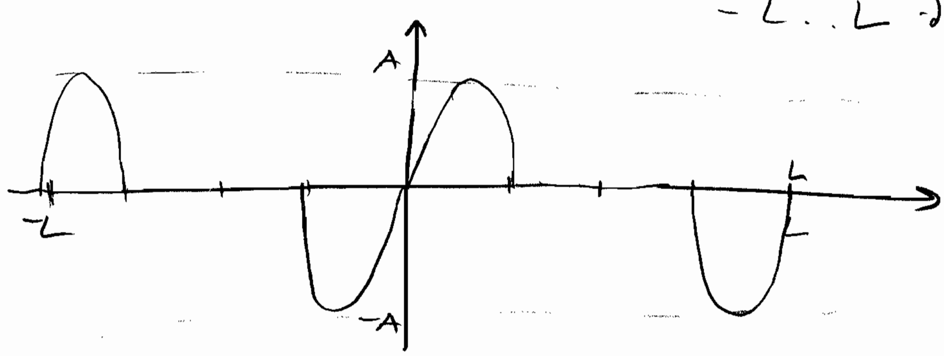
$$\Psi(x,t=0) = \begin{cases} A\sin\frac{5\pi x}{L}, & 0<x<L/5 \\ 0, & L/5 < x\ 3L/5 \\ A\sin\frac{5\pi x}{L}, & \frac{3L}{5} < 0 < L \end{cases}$$

$$\dot\Psi(x,t=0) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \varphi_n)\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \varphi_n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x = \Psi(x,t=0)$$

נרחיב את הפונקציה ל- $-L..L$

לפונקציה אי-זוגית



$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \Psi(x,t=0)\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{-3L/4} A \sin\frac{4\pi x}{L}\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_{-L/4}^{L/4} A \sin\frac{4\pi x}{L}\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx +$$

$$+\frac{1}{L}\int_{3L/4} A \sin\frac{4\pi x}{L}\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx =$$

$$= \frac{2A}{L}\left(\int_0^{L/4}\sin\frac{4\pi x}{L}\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx + \int_{3L/4}^{L}\sin\frac{4\pi x}{L}\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx\right)$$

$$\int_a^b \sin\frac{4\pi x}{L}\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b\left(\cos\frac{\pi}{L}(4-n)x - \cos\frac{\pi}{L}(4+n)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L}{\pi}\left(\frac{1}{4-n}\sin\frac{\pi}{L}(4-n)x\Big|_a^b - \frac{1}{4+n}\sin\frac{\pi}{L}(4+n)x\Big|_a^b\right)$$

$$B_n = \frac{\cancel{2}A}{\cancel{L}}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{L}}{4\pi}\left[\frac{1}{4-n}\sin\frac{\pi}{\cancel{L}}(4-n)\frac{\cancel{L}}{4} - \frac{1}{4+n}\sin\frac{\pi}{\cancel{L}}(4+n)\frac{\cancel{L}}{4} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4-n}\left(\cancel{\sin\frac{\pi}{L}(4-n)L} - \sin\frac{\pi}{\cancel{L}}(4-n)\frac{3\cancel{L}}{4}\right) - \frac{1}{4+n}\left(\cancel{\sin\frac{\pi}{L}(4+n)L} - \sin\frac{\pi}{\cancel{L}}(4+n)\frac{3\cancel{L}}{4}\right)\right]$$

$$B_n = \frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{4-n}\left(\sin\frac{\pi(4-n)}{4} - \sin\frac{3\pi(4-n)}{4}\right) - \frac{1}{4+n}\left(\sin\frac{\pi(4+n)}{4} - \sin\frac{3\pi(4+n)}{4}\right)\right]$$

$$B_1 = \frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{3}\left(\sin\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{9\pi}{4}\right) - \frac{1}{5}\left(\sin\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{15\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = 0$$

$$B_2 = \frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{9\pi}{2}\right)\right] =$$

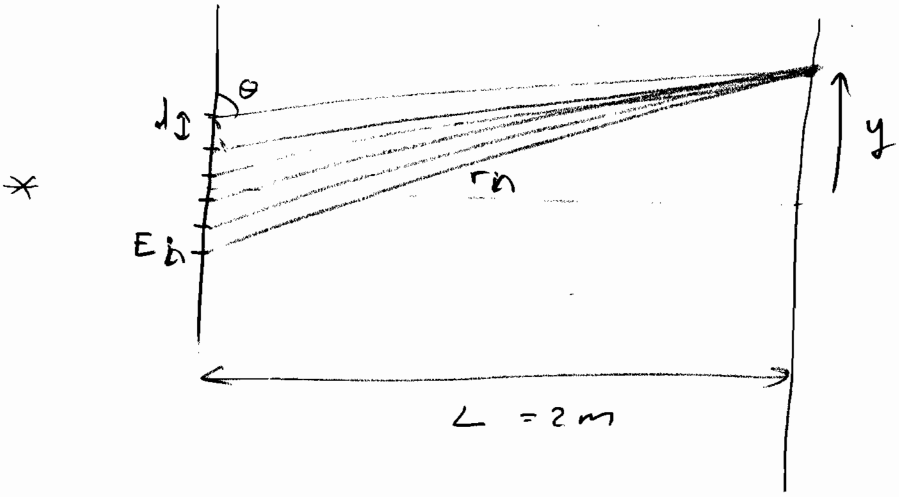
$$= \frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{6}\cdot(-1-1)\right) = \frac{4A}{3\pi}$$

$$B_3 = \frac{A}{\pi}\left[1\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{7}\left(\sin\frac{7\pi}{4} - \sin\frac{21\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{7}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = 0$$

$$B_4 = \frac{A}{2}$$

שאלה 3



(א) תמונת ההתאבכות

$$E_n = A e^{-i\omega t} e^{ikr_n}$$

$$r_n = r_1 + n d \sin\theta = r_1 + n\Delta \qquad \sin\theta \overset{!}{=} y/L \qquad n = 0,..,5 \text{ - מספר הסדק}$$

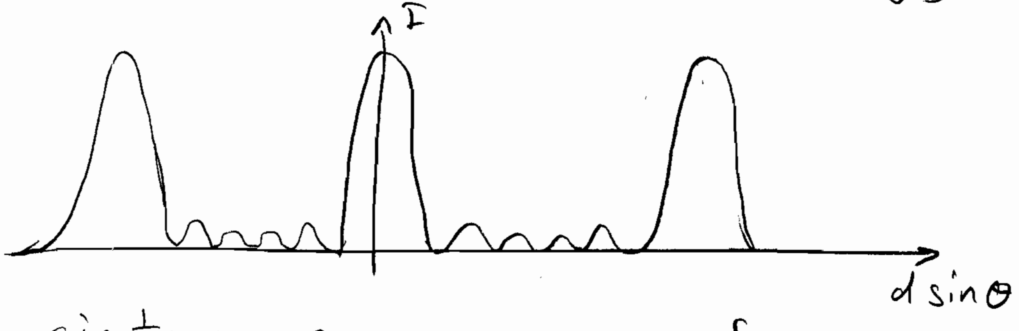
$$E = \sum_{n=0}^{5} A e^{-i\omega t} e^{ikr_n} = A e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{5} e^{ikr_1} e^{ikn\Delta}$$

$$= A e^{-i\omega t + ikr_1} \frac{e^{6ik\Delta} - 1}{e^{ik\Delta} - 1} = A e^{-i\omega t + ikr_1} \frac{e^{3ik\Delta}\left(e^{3ik\Delta} - e^{-3ik\Delta}\right)}{e^{\frac{1}{2}ik\Delta}\left(e^{\frac{1}{2}ik\Delta} - e^{-\frac{1}{2}ik\Delta}\right)} =$$

$$= A e^{-i\omega t + ikr} e^{i\frac{5}{2}k\Delta} \frac{\sin 3k\Delta}{\sin\frac{1}{2}k\Delta}$$

$$I = \langle |E|^2 \rangle = I_0 \left(\frac{\sin 3k\Delta}{\sin\frac{1}{2}k\Delta}\right)^2$$

תמונת ההתאבכות נראית בצורה הבאה:



המקסימומים הראשיים מתקבלים כאשר $\sin\frac{1}{2}k\Delta = 0$.

$$k\Delta = 2\pi n$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d\frac{y_n}{L} = \cancel{2\pi} n \Rightarrow y_n = \lambda\frac{L}{d} n$$

המרחק בין שניים עוקבים:

$$y_{n+1} - y_n = \lambda\frac{L}{d} = 6\,mm$$

המינימומים יתקבלו כאשר: $\sin 3k\Delta = 0$ and $\sin \frac{1}{2}k\Delta \neq 0$

$$3k\Delta = \pi n$$

$$3\frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y_n}{L} = \pi n \Rightarrow y_n = \frac{\lambda L}{6d} n$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda L}{6d} = 1\text{ mm}$$

* הערה: בין שני מקסימומים ראשיים יש $N-1$ (N - מספר הסדקים) מינימומים עוקבים, וכן $N-2$ מקסימומים משניים.

ג) מיקום המקסימום של המקור הראשון:

מיקום המינימום של המקור השני:

$$y_n = \lambda_1 \frac{L}{d} n$$

$$y_m = \frac{\lambda_2}{6}\frac{L}{d} m$$

$\lambda_1 = 600\text{ nm}$

$\lambda_2 = 610\text{ nm}$

$$y_n = y_m$$

$$\lambda_1 n = \frac{\lambda_2}{6} m \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m}{6n} = \frac{60}{61}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{360}{61}$$

המספרים השלמים הראשונים שמקיימים את השוויון הם 360, 61

$$\Rightarrow y = 600\text{nm} \cdot \frac{2\text{m}}{0.2\text{mm}} \cdot 60 = 36\text{ cm}$$

הפוך,

$\lambda_1 = 610\text{nm}$

$\lambda_2 = 600\text{nm}$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m}{6n} = \frac{610}{600} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{366}{60} = \frac{61}{10}$$

$$m = 61$$
$$n = 10$$

$$y = 610\text{nm}\,\frac{2\text{m}}{0.2\text{mm}} \cdot 10 = 6.1\text{ cm}$$

מכאן, במרחק של 6.1cm ניתן להפריד בין המקורות.

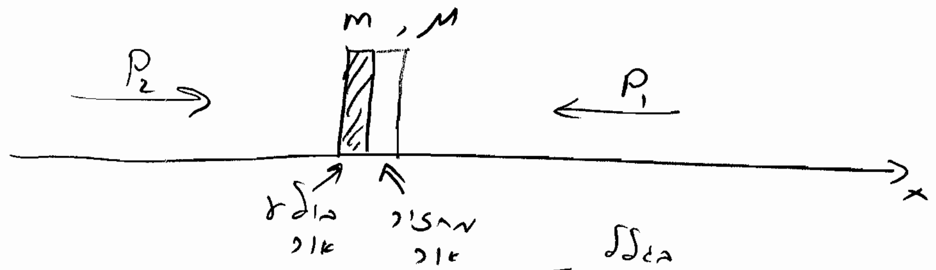
שאלה 4

א) העוצמה המקורית I_0
אחרי המקטב הראשון $I_1 = I_0 \cos^2 30 = \frac{3}{4} I_0$
אחרי המקטב השני $I_2 = I_1 \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4} I_1 = \frac{9}{16} I_0$

ב) אחרי המקטב הראשון נשאר $I_1 = \frac{1}{2} I_0$ $\left(\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2} \right)$
והגל מקוטב בכיוון 30° עם ציר $\hat{y}$.
אחרי המקטב השני בציר $\hat{y}$ $I_2 = I_1 \cos^2 30 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{8} I_0$

ג) כיוון הקיטוב המעגלי לא משפיע על שום דבר בשאלה זו.
לכן, כמו בסעיף ב' $I_2 = \frac{3}{8} I_0$

שאלה 5



$P_1 = P_2$

$\vec{F}_1 = -\frac{2P}{c}\hat{x}$ בגלל ההחזרה המושלמת ① הכוח המופעל ע"י לייזר

$\vec{F}_2 = \frac{P}{c}\hat{x}$ ② "

סה"כ הכוח שמופעל ע"י הלייזרים הוא $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{P}{c}\hat{x}$

והגוף ינוע שמאלה.

כוח החיכוך הוא $\vec{f} = -\mu \dot{x}\hat{x}$

$$m\ddot{x} = -\frac{P}{c} - \mu\dot{x} \qquad \dot{x} = v$$

$$m\dot{v} = -\frac{P}{c} - \mu v$$

אחרי הרבה זמן הגוף יגיע למהירות מקסימלית

(פתרון של המד"ר הוא $v = Ae^{-\alpha t} + v_\infty$)

$$t \to \infty \Rightarrow \dot{v} = 0$$

$$v_\infty = -\frac{P}{c\mu}$$

המהירות המקסימלית היא $\frac{P}{c\mu}$ שמאלה.