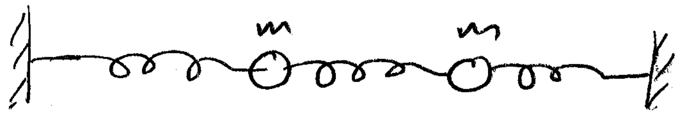
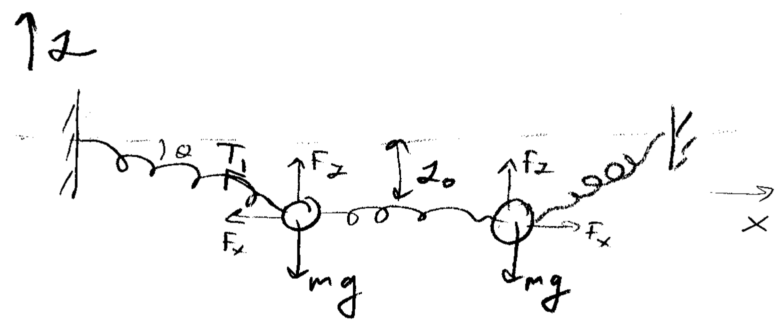
שאלה 1





א) המערכת היא סימטרית לשיקוף סביב $x = \frac{3}{2}L$ לכן הקפיץ האמצעי ישאר אופקי והכוחות שיפעלו על כל אחת מהמסות יהיו שווים בגודלם, וכן הקפיצים הצדדיים יתארכו באותה מידה.

נסמן ב-l את האורך של הקפיץ הראשון במצב שיווי המשקל.
לכן $3L-l$ זהו האורך של קפיץ האמצעי.

$$T_1 = k(l - L_0)$$

$$F_z = +T\sin\theta = +k(l-L_0)\frac{z_0}{l} = +kz_0\left(1-\frac{L_0}{l}\right)$$

$$F_x = T\cos\theta = k(l-L_0)\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{l}\right)^2}$$

המשוואות שנותנות z_0 ו-l הן:

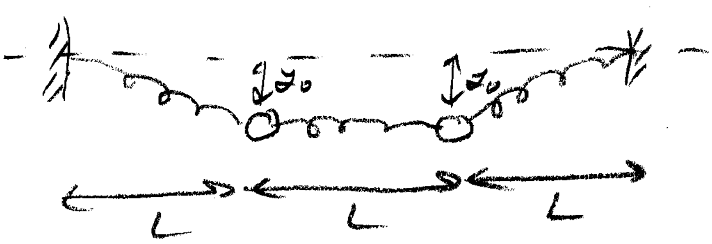
$$\begin{cases} mg = kz_0\left(1-\frac{L_0}{l}\right) \\ k\left(3L-2\sqrt{l^2-z_0^2}-L_0\right) = k(l-L_0)\sqrt{1-\left(\frac{z_0}{l}\right)^2} \end{cases}$$

עבור $L_0 = 0$

$$z_0 = \frac{mg}{k}$$

$$3L - 2\sqrt{l^2-z_0^2} = \sqrt{l^2-z_0^2} \Rightarrow \sqrt{l^2-z_0^2} = L$$

כלומר מצב שיווי המשקל הוא:

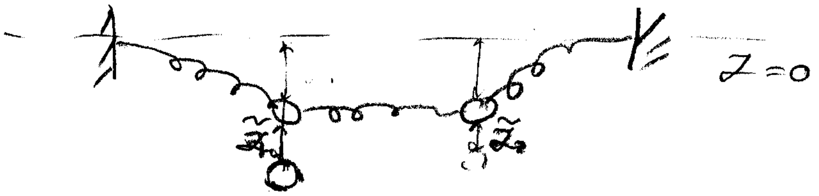


שאלה 1 - המשך

(ג) כיוון ש- $L_0=0$ הכוח הרוחבי המחזיר לינארי ב- z.

נסמן ב $\tilde{z}_1,\tilde{z}_2$ את הסטיות ממצב שיווי המשקל:

וב z_1,z_2 מיקומי המסות יחסית לאפס



$$\begin{cases} m\ddot{\tilde{z}}_1 = -2k\tilde{z}_1 + k\tilde{z}_2 \\ m\ddot{\tilde{z}}_2 = k\tilde{z}_1 - 2k\tilde{z}_2 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\tilde{z}}_1 \\ \ddot{\tilde{z}}_2 \end{pmatrix} + \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$2-\lambda = \pm 1 \qquad \lambda \to 1,\ 3$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_0 \Rightarrow \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

המיקום ביחס לאפס הוא
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 - z_0 \\ \tilde{z}_2 - z_0 \end{pmatrix}$$

(ד) ב- $t=0$: $z_2' = 2z_0$ $z_1' = z_0$ (יחסית למצב שיווי המשקל) $\Leftarrow$ $z_1 = 0$, $z_2 = z_0$
(יחסית לאפס)

המהירות היא אפס $\Leftarrow$ $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

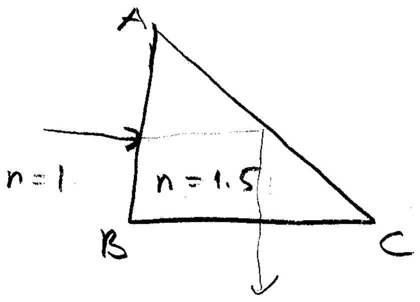
$$\begin{cases} A_1 + A_2 - z_0 = 0 \\ A_1 - A_2 - z_0 = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = z_0 \\ A_1 - A_2 = 2z_0 \end{cases}$$

$$2A_2 = -z_0 \Rightarrow A_2 = -\frac{z_0}{2}$$

$$2A_1 = 3z_0 \Rightarrow A_1 = \frac{3}{2}z_0$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}z_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\omega_1 t - \frac{z_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\omega_2 t - \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2



א) $R_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1.5-1}{1.5+1} = \frac{1}{5}$

$\Downarrow$

$\underline{I = \frac{1}{25} I_0}$

ב) הזווית הקריטית עבור זכוכית

$\sin\theta_{cr} = \frac{1}{1.5}$

$\underline{\theta_{cr} = 41.8^\circ}$

זווית הפגיעה בתוך הפריזמה היא $\theta = 45^\circ$ והיא גדולה מהזווית הקריטית $\Leftarrow$ אין אור שעובר לאוויר במשטח AC.

$I = 0$

ג) האור שעובר דרך הדופן AB אל תוך הפריזמה, עוצמתו

$I = \frac{24}{25} I_0$

כיוון שאין איבוד עוצמה בדופן AC (האור לא יוצא ממנה), אזי האור שייצא דרך הדופן BC, עוצמתו תהיה

$I = \left(\frac{24}{25}\right)^2 I_0 = \frac{576}{625} I_0$

מה קורה אם מתחשבים באינסוף החזרות? (לא היה צורך להתחשב בזה במבחן)

א) $R^{(0)} = R_{12}$ $\quad R^{(1)} = T_{12} R_{12} T_{12} = T^2 R$ $\quad R^{(2)} = T_{12} R_{12} R_{12} R_{12} T_{12}$

$R^{(3)} = T_{12} (R_{12} R_{12})(R_{12} R_{12}) R_{12} T_{12}$ . . .

$R^{(n)} = T_{12}^2 R_{12}^{n+1\,n}$, $n > 1$

$$R = R^{(0)} + T^2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{2n+1} = R_{12} + \frac{T_{12}^2}{R_{12}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(R_{12}^2\right)^n =$$

$$= R_{12} + \frac{T^2}{\cancel{R_{12}}} \frac{R_{12}^{\cancel{2}}}{1 - R_{12}^2} = R_{12}\left(1 + \frac{T_{12}^2}{1 - R_{12}^2}\right)$$

$R_{12} = \frac{1}{5}$
$T_{12}^2 = 1 - R_{12}$

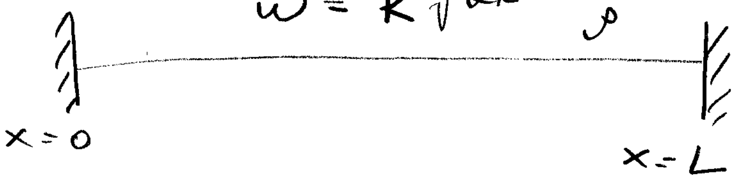
$\Rightarrow I = R^2 I_0$

ב) $I = 0$

ג) $I = T^2 I_0 = (1 - R^2) I_0$

שאלה 3

$$\omega = k\sqrt{\alpha k^2 + \frac{T}{\rho}}$$



$\alpha > 0$

א

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\alpha k^2 + \frac{T}{\rho}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\alpha k^2 + \frac{T}{\rho}} + k\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\alpha k^2 + \frac{T}{\rho}}}\cdot \cancel{2}\alpha k =$$

$$v_g = \frac{2\alpha k^2 + \frac{T}{\rho}}{\sqrt{\alpha k^2 + \frac{T}{\rho}}}$$

ב תנאי השפה

$$y(x=0) = y(x=L) = 0$$

פתרון כללי של משוואת גלים:

$$y(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$y(0,t) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = \pi n$$

$$k_n = \frac{\pi n}{L}$$

פתרון המקיים את תנאי השפה:

$$y(x,t) = \sum_n A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

תנאי התחלה:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0 = -\sum_n \omega_n A_n \sin k_n x \sin \varphi_n = 0 \Rightarrow \underline{\varphi_n = 0}$$

$$y(x,0) = \sin\frac{\pi x}{L} + 5\sin\frac{2\pi x}{L} + 9\sin\frac{3\pi x}{L}$$

אם נתאים את הפתרון הזה לפתרון הכללי (ואפילו אין צורך בפורייה)
אז נראה כי לפתרון יהיו רק 3 אופנים:

$n=1 \quad A_1 = 1$

$n=2 \quad A_2 = 5$

$n=3 \quad A_3 = 9$

לשאר האופנים מקדמים מתאפסים.

המשך שאלה 3

לכן הפתרון הוא:

$$y(x,t) = \sin k_1 x \cos \omega_1 t + 4 \sin k_2 x \cos \omega_2 t + 9 \sin k_3 x \cos \omega_3 t$$

כאשר

$$k_n = \frac{\pi n}{L} \qquad \omega_n = k_n \sqrt{\alpha k_n^2 + \frac{T}{\rho}}$$

ב) המיתר יחזור לצורתו המקורית אם וכאשר $\cos \omega_i t = 1 \ \forall i$

$$\Downarrow$$

$$t_i = \frac{2\pi m_i}{\omega_i} \quad , m = 1, 2, \ldots$$

יש לחפש m כך שיתקיים $t_1 = t_2 = t_3$

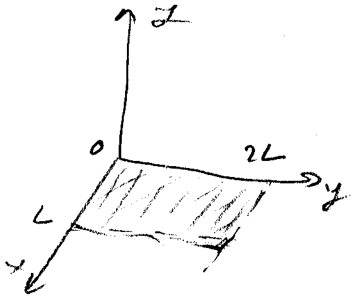
נכתוב את t_i במפורש:

$$t_i = \frac{2\pi m_i L}{\pi i} \left(\frac{\alpha \pi^2 i^2}{L^2} + \frac{T}{\rho} \right)^{-1/2}$$

ניתן לראות שלא קיימים m_i שמקיימים את התנאי...

המיתר לא יחזור לצורתו הראשונית.

שאלה 4



$$z = z(x,y)$$

משוואת גלים: $v^2 \nabla^2 z = \ddot{z}$

הפרדת משתנים: $z = X(x)Y(y)T(t)$

נקבל:

$$v^2 \frac{X''}{X} + v^2 \frac{Y''}{Y} - \frac{\ddot{T}}{T} = 0$$

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \qquad \frac{X''}{X} = -k_x^2$$

וכמו כן מתקיים: $v^2(k_x^2 + k_y^2) = \omega^2$

$$\Rightarrow T \propto \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$X \propto \cos(k_x x + \varphi_2)$$

$$Y \propto \cos(k_y y + \varphi_3)$$

א) תנאי שפה:

$$z(0,y) = 0$$

$$\Rightarrow X \propto \sin k_x x$$

$$z(L,y) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{\pi n_x}{L}$$

באותה צורה:

$$z(x,0) = z(x,2L) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{\pi n_y}{2L}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = v^2\pi^2\left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{4L^2}\right) = \frac{v^2\pi^2}{4L^2}(4n_x^2 + n_y^2)$$

1) $n_x = n_y = 1 \Rightarrow \omega^2 = \frac{v^2\pi^2}{4L^2} \cdot 5$

2) $n_x = 1, n_y = 2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{v^2\pi^2}{4L^2} \cdot 8$

3) $n_x = 1, n_y = 3 \Rightarrow \omega^2 = \frac{v^2\pi^2}{4L^2} \cdot 13$

4) $n_x = 2, n_y = 1 \Rightarrow \omega^2 = \frac{v^2\pi^2}{4L^2} \cdot 17$

שאלה 4 - המשך

ב) הפעם תנאי השפה הם:
(כמו בסעיף א')

$Z(0,y)=0 \Rightarrow X \propto \sin k_x x$

$Z(L,y)=0 \Rightarrow k_x = \dfrac{\pi n_x}{L}$

$Z(x,0)=0 \Rightarrow Y \propto \sin k_y y$

$\left.\dfrac{dZ}{dy}\right|_{y=2L} = 0 \Rightarrow \cos k_y \cdot 2L = 0$

$2Lk_y = \left(n_y - \frac{1}{2}\right)\pi \qquad n_y = 1, 2, \dots$

$k_y = \dfrac{\left(n_y - \frac{1}{2}\right)\pi}{2L}$

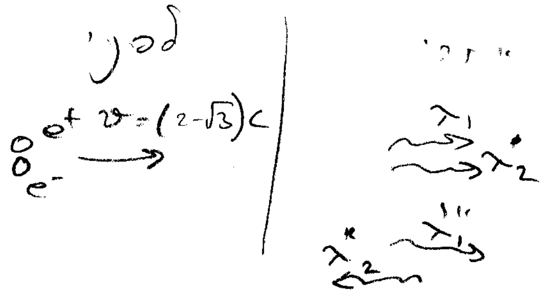
$$\omega^2 = v^2\left(\frac{\pi^2 n_x^2}{L^2} + \frac{\left(n_y-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{4L^2}\right) = \frac{v^2\pi^2}{4L^2}\left(4n_x^2 + \left(n_y - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

1) $n_x = n_y = 1 \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{v^2\pi^2}{4L^2}\cdot\left(4\frac{1}{4}\right)$

2) $n_x = 1,\ n_y = 2 \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{v^2\pi^2}{4L^2}\left(6\frac{1}{4}\right)$

3) $n_x = 1,\ n_y = 3 \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{v^2\pi^2}{4L^2}\left(10\frac{1}{4}\right)$

4) $\begin{matrix} n_x = 1, & n_y = 4 \\ n_x = 2, & n_y = 1 \end{matrix} \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{v^2\pi^2}{4L^2}\left(16\frac{1}{4}\right)$



שאלה 5

ניתן להסתכל על e^-,e^+ כעל חלקיק אחד בעל מסה $2m$ ותנע p.

שימור תנע!

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$$

שימור אנרגיה:

$$p^2c^2+(2m)^2c^4=(|p_1|+|p_2|)^2c^2$$

$$p_1=p-p_2$$

$$\Rightarrow p^2+4m^2c^2=(|p-p_2|+|p_2|)^2=(p-p_2)^2+p_2^2+2|p-p_2||p_2|$$

1. נניח $p,p_1>0$ וכן $p_2>0$

$$p^2+4m^2c^2=\cancel{p^2}-\cancel{2pp_2}+\cancel{2p_2^2}+\cancel{2pp_2}-\cancel{2p_2^2}$$

⇐ המצב לא אפשרי

2. נניח $p,p_1>0$ וכן $p_2<0$

$$\cancel{p^2}+4m^2c^2=\cancel{p^2}-2pp_2+2p_2^2-2pp_2+2p_2^2$$

$$\cancel{4}p_2^2-\cancel{4}pp_2-\cancel{4}m^2c^2=0$$

$$p_2=\frac{p\pm\sqrt{p^2+4m^2c^2}}{2}$$

כיוון שכבר התחשבנו בסימן נקח את "+":

$$\underline{p_2=\frac{p+\sqrt{p^2+4m^2c^2}}{2}}$$

$v=(2-\sqrt{3})c$ m/c
$\hbar=1.05\cdot10^{-34}\ \frac{m^2kg}{S}$
$m_e=9.1\cdot10^{-31}$ kg
$c=3\cdot10^8$ m/s

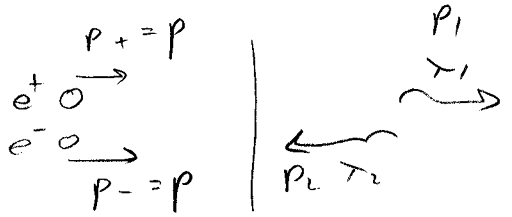
$$p=\frac{2m_e v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=1.52\cdot10^{-22}\ \frac{kg\cdot m}{S}$$

$$p_2=3.59\cdot10^{-22}\ \frac{kg\cdot m}{S}$$ בכיוון המנוגד לכיוון של האלקטרון

$$\lambda_2=\frac{h}{p_2}=1.84\cdot10^{-12}\ m$$

$$p_1=|p-p_2|\Rightarrow p_1=2.07\cdot10^{-22}\ \frac{kg\cdot m}{S}$$ בכיוון של האלקטרון

$$\lambda_1=\frac{h}{p_1}=3.19\cdot10^{-12}\ m$$



פתרון נוסף

נתייחס לאלקטרון ופוזיטרון מנוגדים (כל אחד בעל תנע p)

$$2p = p_+ + p_- = p_1 + p_2$$

$$(2p)^2 \cancel{c^2} + (2m)^2 c^{4} = (|p_1| + |p_2|)^2 \cancel{c^2} = (2E)^2 \qquad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$4(p^2 + m^2c^2) = p_1^2 + p_2^2 + 2|p_1||p_2|$$

$$p_1 = 2p - p_1$$

$$4(p^2 + m^2c^2) = p_2^2 + (2p - p_2)^2 + 2|p_2||2p - p_2|$$

נניח $p, p_1 > 0$, $p_2 > 0$

$$\cancel{4p^2} + 4m^2c^2 = \cancel{p_2^2} + \cancel{4p^2} + \cancel{p_2^2} - 4pp_2 + 4pp_2 - 2\cancel{p_2^2}$$

לא ייתכן!

נניח $p, p_1 > 0$, $p_2 < 0$

$$\cancel{4p^2} + 4m^2c^2 = p_2^2 + \cancel{4p^2} + p_2^2 - 4pp_2 - 4pp_2 + 2p_2^2$$

$$4p_2^2 - 8pp_2 - 4m^2c^2$$

כמו בעמוד הקודם נבחר את "+"

$$p_2 = p \pm \sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 7.59 \cdot 10^{-25} \ \frac{m \cdot kg}{s}$$

$$\Rightarrow p_2 = 3.59 \cdot 10^{-22} \ \frac{m\, kg}{s}$$

$$p_1 = |2p - p_2| = 2.07 \cdot 10^{-22} \ \frac{m \cdot kg}{s}$$

ולכן מקבלים אורכי גל מדויק כמו בפתרון הקודם.

פתרון נוסף (עוד אחד)

במע' מרכז המסה האלקטרון והפוזיטרון נמצאים במקום ולכן $p=0$.

התנע הכולל של הפוטונים הנוצרים הוא גם $p=0$

$\Leftarrow$ $p_1 = -p_2$ במע' מ"מ.

שימור אנרגיה:

$$\cancel{2}mc^2 = \cancel{2}\frac{hc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = 2.49\cdot 10^{-12}\ m$$

כעת יש לעבור חזרה למע' המעבדה:

ניתן לעשות טרנספורמציית לורנץ לתנע, או

לשים לב שצריך לעשות אפקט דופלר יחסותי (וזה):

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$$ - (הנוסחה הזו נובעת מטרנס' לורנץ)

אחרי שמציבים פעם $(\sqrt{3}-2)c = v$ ופעם $v=(2-\sqrt{3})c$ עבור הפוטון המתקרב ומתרחק ביחס לצופה, מקבלים שוב את אותם אורכי הגל.