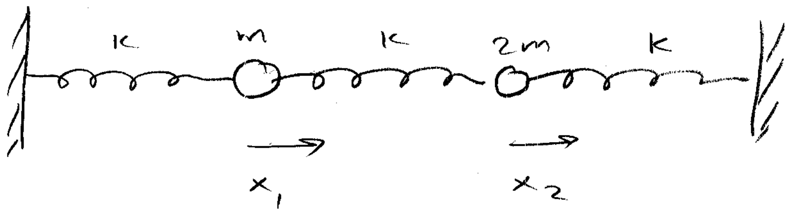
שאלה 1



x_1, x_2 - סטיות מנק' שיווי המשקל

א) משוואות התנועה:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - kx_1 + kx_2 \\ 2m\ddot{x}_2 = -kx_2 - kx_2 + kx_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -2\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 \\ \ddot{x}_2 = \frac{1}{2}\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 \end{cases}$$

ב) אופני התנודה

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{x}} + A\vec{x} = 0 \qquad A = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים:

$$|A - \tilde{\lambda} I| = 0 \Rightarrow \left| \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - \frac{1}{2} = 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + \frac{3}{2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\frac{3}{2}}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}\lambda_1 = \frac{k}{m}\,\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m}\lambda_2 = \frac{k}{m}\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

נמצא את הוקטורים העצמיים:

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

אם כן, הפתרון הכללי הוא:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1 \vec{V}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \vec{V}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

ב) תנאי ההתחלה:

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = x_2(0) = 0 \quad x_1(0) = d$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega_1 A_1 \vec{V}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_2 A_2 \vec{V}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow \underline{\varphi_1 = \varphi_2 = 0}$$

$$x_2(0) = A_1 V_{1b} + A_2 V_{2b} = 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2} A_1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2} A_2 = 0$$

$$(\sqrt{3}+1) A_2 = (\sqrt{3}-1) A_1 \Rightarrow A_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} A_1 = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} A_1 = (2-\sqrt{3}) A_1$$

$$x_1(0) = d = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 + (2-\sqrt{3}) A_1 = d$$

$$(3-\sqrt{3}) A_1 = d \Rightarrow \underline{A_1 = \frac{d}{3-\sqrt{3}}}$$

$$\underline{A_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} d}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{3-\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2} \frac{k}{m}}\, t\right) + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2} \frac{k}{m}}\, t\right)}$$

שאלה 2

$I_x = I_0$

$I_y = 4I_0$

$I_{45^\circ} = \frac{9}{2} I_0$

(א)

נבדוק אם הקיטוב הוא לינארי.

I_m - העוצמה של האלומה הפוגעת. θ - זווית הקיטוב

$I_x = I_m \cos^2\theta = I_0$

$I_y = I_m \cos^2(90^\circ - \theta) = 4I_0 = I\sin^2\theta$

$\Rightarrow I_m = 5I_0 \quad \cos^2\theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 63.4^\circ$

נבדוק אם זה מתאים למדידה השלישית:

$I_{45} = I\cos^2(\cancel{\theta-45}) = 5I_0\cos^2(\theta - 45) = 5I_0 \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{2} I_0$

הקיטוב הוא לינארי בזווית $\theta \approx 63.4^\circ$ ביחס לציר x.

(ב) אחרי המקטב הראשון $I_1 = I_0$ והאור מקוטב בציר x.

אחרי המקטב השני בזווית 45°: $I_2 = I_0\cos^2 45 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} I_0$

והאור מקוטב בזווית 45°.

אחרי המקטב השלישי (שהוא בזווית של 45° לקודם לו):

$I_3 = I_2\cos^2 45^\circ = \frac{1}{4} I_0$

ומכאן העוצמה היא $I = \frac{1}{4} I_0 = \frac{1}{20} I_m$

(ג) אחרי המקטב הראשון: $I_1 = I_0$.

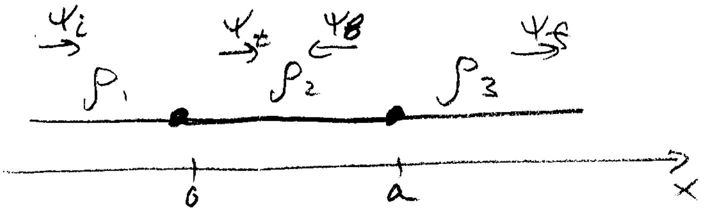
לוחית רבע גל ב-45° הופכת את הקיטוב הלינארי בציר $\hat{x}$ לקיטוב מעגלי ללא איבוד עוצמה $I_2 = I_1$

המקטב השלישי הופך את הקיטוב המעגלי ללינארי בכיוון $\hat{y}$

עם העוצמה $I_3 = \frac{1}{2} I_2$ $\left(\langle\cos^2\theta\rangle = \frac{1}{2}\right)$

לסיום: $I = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{10} I_m$ - העוצמה המתקבלת.

שאלה 3



באיור הרציון יין לדף חוזר...

$$\Psi_i = A_i e^{i\omega t} e^{-ik_1 x} \qquad \Psi_B = A_B e^{i\omega t} e^{ik_2 x}$$

$$\Psi_t = A_t e^{i\omega t} e^{-ik_2 x} \qquad \Psi_f = A_f e^{i\omega t} e^{-ik_3 x}$$

א) תנאי שפה

$\underline{x=0}$

$$\Psi_i = \Psi_t + \Psi_B \Rightarrow \underline{A_i = A_t + A_B}$$

$$-T\frac{d\Psi_i}{dx} + T\frac{d}{dx}(\Psi_t + \Psi_B) = 0 \Rightarrow ik_1 A_i + ik_2(-A_t + A_B) = 0$$

$\underline{x=a}$

$$\Psi_t + \Psi_B = \Psi_f \Rightarrow A_t e^{-ik_2 a} + A_B e^{ik_2 a} = A_f e^{-ik_3 a}$$

$$-T\frac{d}{dx}(\Psi_t + \Psi_B) + T\frac{d\Psi_f}{dx} = 0 \Rightarrow ik_2\left(A_t e^{-ik_2 a} - A_B e^{ik_2 a}\right) - ik_3 A_f e^{\dots}$$

ב)

$\boxed{x=0} \Rightarrow A_t = A_i - A_B$

$$ik_1 A_i + ik_2(-A_i + 2A_B) = 0$$

$$A_B = \frac{k_2 - k_1}{2k_2} A_i$$

$$A_B = A_i - A_t$$

$$ik_1 A_i + ik_2(-2A_t + A_i) = 0$$

$$A_t = \frac{k_2 + k_1}{2k_2} A_i$$

$\underline{x=a}$ $\quad \cancel{i}k_2\left(A_t e^{-ik_2 a} - A_f e^{-ik_3 a} + A_t e^{-ik_2 a}\right) - \cancel{i}k_3 A_f e^{-ik_3 \dots}$

$$2k_2 A_t e^{-ik_2 a} = A_f (k_3 + k_2) e^{-ik_3 a}$$

$$A_f = \frac{2k_2}{k_3 + k_2} e^{-i(k_2 - k_3)a} A_t = \frac{k_2 + k_1}{k_3 + k_2} e^{i(k_3 - k_2)a} A_i$$

$$\cancel{i}k_2\left(A_f e^{-ik_3 a} - 2A_B e^{+ik_2 a}\right) - \cancel{i}k_3 A_f e^{-ik_3 a} = 0$$

$$A_f = \frac{2k_2}{k_2 - k_3} e^{i(k_2 + k_3)a} A_B = \frac{k_2 - k_1}{k_2 - k_3} e^{i(k_2 + k_3)a} A_i$$

שאלה 3 – המשך

נשווה את הביטויים:

$$\frac{(k_2+k_1)}{k_3+k_2}e^{i(k_3-k_2)a}=\frac{k_2-k_1}{k_2-k_3}e^{i(k_2+k_3)a}$$

$$\frac{(k_2-k_1)(k_2+k_3)}{(k_2-k_3)(k_1+k_2)}=e^{-2ik_2a}$$

ב) הביטוי יגיל שקיבלנו החלק השמאלי ממשי ⇐

$$\sin(2k_2a)=0 \Rightarrow \cos(2k_2a)=\pm 1$$

$$/\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1/$$

(*) $\cos(2k_2a)=1$

$$\Rightarrow \cancel{k_2^2}+k_2k_3-k_1k_2-\cancel{k_1k_3}=k_1k_2+\cancel{k_2^2}-\cancel{k_1k_3}-k_2k_3$$

$$k_2(k_3-k_1)=k_2(k_1-k_3) \Rightarrow \underline{k_1=k_3}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\rho_1=\rho_3}$$

(*) $\cos(2k_2a)=-1$

$$\Rightarrow k_2^2+\cancel{k_2k_3}-\cancel{k_1k_2}-k_1k_3=-\cancel{k_1k_2}-k_2^2+k_1k_3+\cancel{k_2k_3}$$

$$\cancel{2}k_2^2=\cancel{2}k_1k_3 \Rightarrow \underline{k_2^2=k_1k_3}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\rho_2^2=\rho_1\rho_3}$$

ג) מהירות הפאזה – $V_p=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ $k=\frac{\omega}{v}$

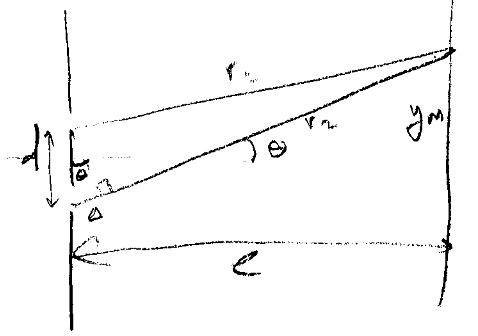
(*) $\cos(2k_2a)=1$

$$\cancel{2}k_2a=\cancel{2}\pi n \Rightarrow a=\frac{\pi n}{k_2}=\frac{\pi n\sqrt{\frac{T}{\rho_2}}}{\omega}$$

(*) $\cos(2k_2a)=-1$

$$2k_2a=2\pi n-\pi \Rightarrow a'=\frac{\pi n}{k_2}-\frac{\pi}{2k_2}=\frac{\pi(2n-1)}{2k_2}=\frac{\pi(2n-1)\sqrt{\frac{T}{\rho_2}}}{2\omega}$$

שאלה 5



(א) עבור $\ell \gg d$,

$$\Delta = d\sin\theta$$

התאבכות בונה תהיה כאשר:

$$d\sin\theta = m\lambda$$

$$\underline{\sin\theta_m = \frac{m\lambda}{d}}$$ - כאשר, שבה נמצא המקסימום m

בכל נקודה הפרש הפאזות האופטי

$$\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

$$\Delta = r_1 - r_2$$

$$\cos(\omega t - kr_1) + \cos(\omega t - kr_2) = 2\cos\left(\omega t - k\frac{r_1+r_2}{2}\right)\cos\frac{1}{2}k(r_1-r_2)$$

$$I(\theta) = I_m \cos^2\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)$$

(ב)

$$\delta = k\Delta = k(r_1-r_2) + k_1 t - k_2 t = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta + \frac{2\pi}{\lambda}(n_1-n_2)t$$

$$/\ k = \frac{2\pi}{\lambda/n} = \frac{2\pi n}{\lambda}\ /$$

$$I(\theta) = I_m\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\left(d\sin\theta + (n_1-n_2)t\right)\right)$$

(ג) הפרש הפאזות הנוצר בקרן 2 מכיסוי הסדקים הוא

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1-n_2)t$$

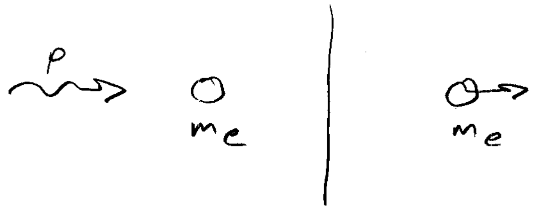
המקסימום יופיע כאשר $(n_1-n_2)t = m\lambda,\ m=0,1,2,3,4,\dots$

$m = 5$ - המקסימום החמישי

$$\Rightarrow \underline{t = \frac{5\lambda}{n_1-n_2}}$$

שאלה 5

(א) אלקטרון חופשי לא יכול לבלוע פוטון.



הפוטון מגיע עם תנע p ואנרגיה pc. נניח שהוא נבלע.
משימור תנע נובע כי התנע של האלקטרון חייבת להיות p אחרי הבליעה.

שימור אנרגיה:
$$\underbrace{(pc+mc^2)^2}_{\text{לפני}} = \underbrace{p^2c^2+m^2c^4}_{\text{אחרי}}$$

$$\cancel{p^2c^2}+\cancel{m^2c^4}+2pmc^3=\cancel{p^2c^2}+\cancel{m^2c^4}$$

$$\Rightarrow p=0$$

סתירה

(ב) *אפקט פוטואלקטרי.

$$\lambda = 2500\,\text{Å} = 2500\cdot10^{-10}\,m$$

$\phi = 2.21\ eV$ - פונקצית העבודה.

$$h\nu = E_k+\phi$$

$$\Rightarrow E_k = h\nu-\phi = h\frac{c}{\lambda}-\phi = \frac{6.62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{2500\cdot10^{-10}} - 2.21\cdot1.6\cdot10^{-19} =$$

$$= 4.4\cdot10^{-19}\,J = \underline{2.76\ eV}$$

* מה התנע המינימלי שנספג ע"י גרעיני המתכת?

$$m_e = 9.1\cdot10^{-31}\,kg$$

$$p_e = \sqrt{2m_eE} = 8.9\cdot10^{-25}\,kg\cdot\frac{m}{s}$$

$$p_{ph} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.62\cdot10^{-34}}{2500\cdot10^{-10}} = 2.6\cdot10^{-27}\,kg\frac{m}{s}$$

אפשר להזניח כאן מאפקטים יחסותיים כי $v_e \sim 0.01c$ - מהירות האלקטרון

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$$

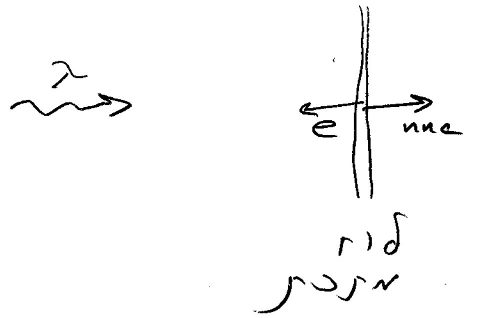
שאלה 5 - המשך

התנע חייב להישמר ⇐

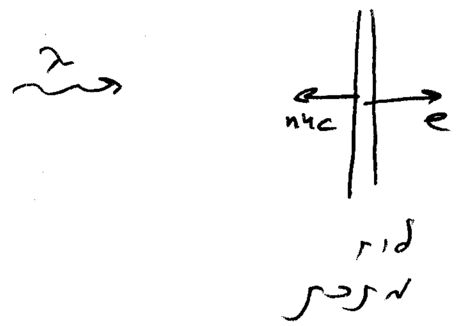
$$\vec{p}_{ph}+\vec{p}_{e}+\vec{p}_{nuc}=0$$

פוטון אלקטרון גרעין

על מנת לקבל תנע מינימלי התנועה צריכה להיות בציר אחד...



במקרה זה התנע הוא מינימלי.



בכיוון פגיעת הפוטון - $|\vec{p}_{nuc}| = |\vec{p}_e - \vec{p}_{ph}| = 8.87\cdot 10^{-25}\ \frac{kg\cdot m}{s}$