

מומנט התמדה

מילות מפתח:

גוף קשיח, מומנט התמד (Inertia), מומנט כוח (Torque), מטוטלת פיסיקלית, מטוטלת פיתול.

הציוד הדרוש:, דיסקת אלומיניום תלויה על תייל, 2 גלילים פליז תלויים על תייל, 2- גלילי פליז עם הברגה, משקלות מלבניות מברזל, מאזניים, קליבר, שעון עצר.

מטרות הניסוי:

- להכיר את מושג ההתמדה ושיטות למדידת מומנט התמדה.
- למדוד מומנט התמד בעזרת זמן מחזור של תנועה הרמונית סיבובית.
- לחשב מומנט התמד תוך שימוש בתכונת האדיטיביות ומשפט שטיינר.

1. תיאוריה

1.1 מומנט התמד

החוק השני של ניוטון $F=ma$ קובע כי יש צורך בכוח על מנת לשנות את מהירותו של גוף. מסת הגוף היא למעשה ההתמד של הגוף, כלומר ככל שמסת הגוף גדולה יותר הגוף יתמיד בתנועתו ודרוש כוח גדול יותר כדי לשנות את מהירותו. באופן דומה, כאשר גוף קשיח מסתובב סביב ציר מסוים יש לגוף נטייה להמשיך בתנועתו הסיבובית, מומנט ההתמד של הגוף הוא האנלוגיה של המסה כלומר ככל שמומנט ההתמד גדול יותר יש צורך במומנט כוח גדול יותר על מנת לשנות את מהירות הסיבוב של הגוף. החוק השני של ניוטון עבור תנועה סיבובית של גוף קשיח בעל מומנט התמד I אשר מופעל עליו מומנט כוח τ הוא, $\tau = I\alpha$ כאשר α היא התאוצה הזוויתית.

את מומנט ההתמד מחשבים באופן הבא: כאשר נתון אוסף של מסות נקודתיות (m_i) הנמצאים במרחקים שונים מציר הסיבוב (r_i) מומנט ההתמד מוגדר ע"י:

$$(1) \quad I = \sum_i m_i r_i^2$$

-מומנט התמדה-

כאשר הגוף הנתון איננו נקודתי ניתן לחלק את הגוף לאלמנטי מסה קטנים m_i , שמרחקו של כל אלמנט מסה מציר הסיבוב הוא r_i ומומנט ההתמד יהיה:

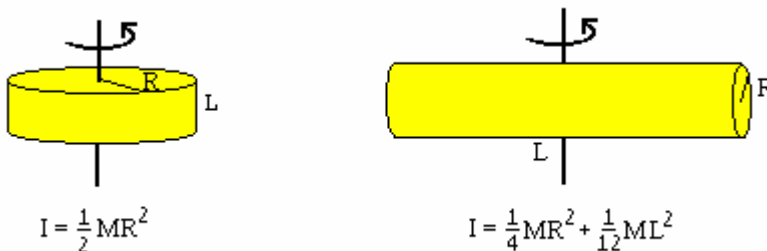
$$(2) \quad I = \int r^2 dm$$

מומנט ההתמד יהיה תלוי בנוסף למסה גם במיקומו ובכוונו של ציר הסיבוב. לדוגמא:

גליל בעל מסה M רדיוס R ואורך L המסתובב סביב ציר העובר דרך מרכז המסה

וניצב לבסיסים, מומנט ההתמד הוא: $I = \frac{1}{2}MR^2$, ואילו אם הציר עובר דרך מרכז

המסה ומקביל לבסיסים מומנט ההתמד הוא: $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$.



ציור 1: מומנט התמד של גליל עבור צירים שונים.

לרוב, נוח לחשב את מומנט ההתמד של גוף עבור ציר סיבוב העובר דרך מרכז המסה. כאשר ציר הסיבוב אינו עובר דרך מרכז המסה אלא בציר אחר המקביל לציר העובר דרך מרכז המסה, נוכל להיעזר במשפט שטיינר לחישוב מומנט ההתמד:

$$(3) \quad I = I_{c.m.} + Mh^2$$

כאשר h הוא המרחק ההסטה בין הציר העובר דרך מרכז המסה לציר האחר ו M מסת הגוף. מומנט התמד הוא גודל אדיטיבי, כלומר, מומנט ההתמד של גוף קשיח הבנוי משני חלקים הוא סכום מומנטי ההתמד של כל אחד מהחלקים (כאשר כל המומנטים מחושבים יחסית לאותו ציר).

1.2 המטוטלת פיסיקלית

במערכות בהן הכוח הפועל על גוף הוא כוח מחזיר הפרופורציוני ישר להעתק מתקבלת תנועה הרמונית (ראה מבוא לתדריך תנודות הרמוניות). לדוגמא מסה המחוברת לקפיץ, הכוח שהקפיץ מפעיל פרופורציוני להעתק ומנוגד לו בכוונו (כוח מחזיר) $F = -kx$ משוואת התנועה עבור תנועה הרמונית נכתבת בצורה :

$$(4) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

זמן המחזור של התנודות הוא $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (ראה עבודת הכנה).

בתנועה מחזורית של מטוטלת פיסיקלית (גוף עם מומנט התמד I המתנווד סביב ציר במרחק D מנקודת מרכז המסה של הגוף) ההעתק הוא זווית הסיבוב θ , הכוח המחזיר הוא מומנט הכוח השקול הפרופורציוני לזווית $\tau = -D\theta$ וההתמד הוא כמובן מומנט ההתמד I , משוואת התנועה עבור זוויות מספיק קטנות תהיה :

$$(5) \quad I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -D\theta$$

וזמן המחזור של התנודות יהיה :

$$(6) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$$

בניסוי נמדוד את מומנט ההתמד של גופים שונים. נשתמש בתנועה הרמונית תוך ניצול העובדה שמומנט ההתמד פרופורציוני לריבוע זמן המחזור, כמו כן, נחשב את מומנט התמד של גופים מורכבים תוך שימוש בתכונת האדיטיביות ובמשפט שטיינר.

1.3 מטוטלת דו חוטית

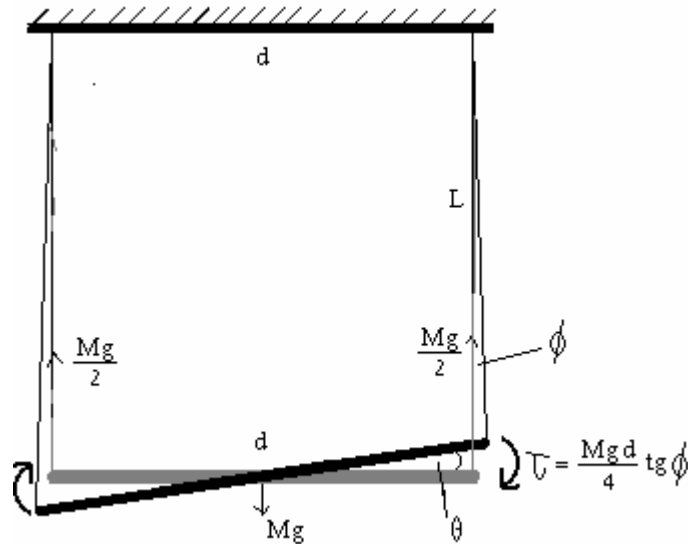
נתלה גליל באורך d באמצעות שני חוטים מקבילים באורך L , כאשר הגליל מתנווד בתנודות סיבוביות קטנות סביב ציר העובר דרך מרכזו ומקביל לבסיסו מתקבלת תנועה הרמונית. נתבונן בציר 2 ונחשב את מומנט הכוח המחזיר : המתחיות בכל אחד

מהחטים היא: $\frac{Mg}{2}$, אם הגליל מוסט בזווית קטנה θ נוצרת זווית ϕ בין החוט לאנך כך ש $L\phi = \frac{d}{2}\theta$. הכוח המחזיר המופעל ע"י החוט על קצה הגליל הוא $\frac{Mg}{2} \tan \phi$. בקירוב של זוויות קטנות, המומנט השקול הפועל על הגליל הוא:

$\tau = \frac{Mgd^2}{4L} \theta$. ובהתאם למשוואה (6) זמן המחזור של התנודות יהיה

$$(7) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{4IL}{Mgd^2}}$$

ממדידת זמן המחזור נוכל לחשב את מומנט ההתמד.



ציור 2: מטוטלת דו חוטית

1.4 מטוטלת פיתול

כאשר מחזיקים תיל בקצה אחד ומסובבים (מפתלים) את הקצה השני בזווית θ , נוצר בתיל מומנט מחזיר השואף להחזיר את התיל למצבו הקודם (עיין בתדריך לניסוי

אלסטיות) ערכו יהיה: $\tau = \frac{\pi Ga^4}{2L} \theta$.

כאשר a רדיוס התיל, L אורך התיל ואילו G מומנט הגזירה.
 אם נתלה גוף בעל מומנט התמד I נקבל תנועה הרמונית סיבובית עם זמן מחזור T
 כאשר מומנט ההתמד פרופורציוני לריבוע זמן המחזור

$$(8) \quad T^2 = \frac{8\pi LI}{a^4 G}$$

באמצעות שיטה זו (מומנט פיתול) ניתן להשוות בין מומנט ההתמד של גופים שונים
 מתוך השוואת זמני המחזור.

1.5 עבודת הכנה

1. הראה ש: $x(t) = A \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ הוא פתרון של המשוואה: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, הראה
 שזמן המחזור הוא: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. נתונה דסקית גלילית ברדיוס R ומסה M המסתובבת סביב ציר הסימטריה שלה. על
 הדסקית מונחים שני גלילים קטנים ברדיוס r ומסה m כל אחד. המרחק בין מרכז כל
 גליל למרכז הדסקית הוא h . חשב את מומנט ההתמד הכולל.

3. נתונה דסקית גלילית ברדיוס R , עובי H וצפיפות מסה ρ המסתובבת סביב ציר
 הסימטריה שלה. בדסקית ישנם שני קדחים עגולים ברדיוס r . המרחק בין מרכז כל
 קדח למרכז הדסקית הוא h . חשב את מומנט ההתמד.

4. בהתאם למשוואה (2), ניתן לחשב את מומנט ההתמד ע"י חישוב האינטגרל
 $I = \int r^2 dm$. חשב את מומנט ההתמד של מוט דק באורך L ומסה M המסתובב סביב
 ציר העובר בקצה המוט וניצב למוט. רמז: אלמנט מסה אינפיניטסימלי יהיה:

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

ומרחקו מציר הסיבוב הוא x .

5. נתונים שני גלילים בעלי רדיוס ומסה זהה אחד הגלילים מלא והשני חלול דק דופן
 (מומנט התמד שונה) שניהם מתגלגלים מאותה נקודה התחלתית וממצב מנוחה לאורך
 מישור משופע. בהגיעם לתחתית המישור מהירותו של מי מהם תהיה גבוהה יותר?
 נמק!

2. מהלך הניסוי

2.1 מדידת מומנט התמד באמצעות מטוטלת דו-חוטית

- נתון לך גליל פליז עבירו נמדוד את מומנט ההתמד. שקול את הגליל, מדוד את אורכו ואת רדיוסו.
- תלה את גליל הפליז כמתואר בצירור 2. וודא שהחוטים מקבילים והגליל אופקי.
- הסט את הגליל להתנדוד בתנודות סיבוביות סביב ציר העובר במרכזו וניצב לציר הסימטריה, הקפד על תנודות קטנות.
- מצא את זמן המחזור מתוך מדידת תקופת זמן של 20 מחזורים.
- מצא את מומנט ההתמד בעזרת משוואה (7), השווה עם הגודל המחושב מתוך מימדי הגליל.
- הסבר כיצד משפיעים הברגים הנמצאים בקצות הגליל על המדידה. חשוב כיצד תושפע התוצאה אם התנודות לא תהיינה קטנות (האם תקבל תוצאה גדולה או קטנה מהמצופה).

2.3 מדידות באמצעות מטוטלת פיתול

א. גליל המסתובב סביב ציר העובר במרכזו ומקביל לבסיסים

- תלה את גליל הפליז מהניסוי הקודם על תיל פלדה כך שישתובב באופן דומה לניסוי הקודם.
- מצא את זמן המחזור מתוך מדידת תקופת זמן של 20 מחזורים.
- מדוד את קוטר התיל ואת אורכו, חשב בעזרת משוואה (8) את מודול הגזירה של התיל השווה עם הערך הידוע מהספרות.

ב. גליל המסתובב סביב ציר העובר במרכזו וניצב לבסיסים

- תלה את גליל הפליז כך שישתובב סביב ציר הסימטריה שלו ומדוד את זמן המחזור.
- חשב את מומנט ההתמד עבור ציר זה מתוך השוואת זמני המחזור ושימוש במשוואה (8). השווה עם הערך המחושב מתוך מימדי הגליל.

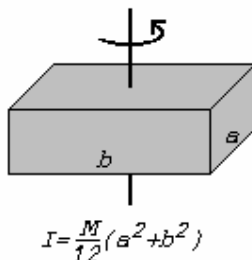
ג. דסקית אלומיניום עם משקולות קטנים

- נתונה לך דסקית אלומיניום, מדוד את רדיוס הדסקית, את עוביה ומסתה.
- תלה את דסקית האלומיניום על התיל. הקפד שהדסקית תהיה אופקית. מדוד את זמן המחזור.
- הנח על הדסקית בצורה סימטרית משקולות שוות מסה m במרחק h מהמרכז, מדוד את זמן המחזור. חזור על המדידה עבור מרחקים שונים.
- בהנחה שהמשקולות נקודתיים מומנט ההתמד הכולל נתון ע"י : $I = I_{c.m.} + Mh^2$. שרטט בגרף את ריבוע זמן המחזור כפונקציה של h^2 , מצא את I_{CM} ע"י אקסטרפולציה.
- השווה את מומנט ההתמד שקיבלת עבור הדסקית עם זה המחושב מתוך מימדי הדסקית.
- חשוב כיצד ישפיעו הקדחים על מומנט ההתמד, וכיצד תשפיע העובדה שהמשקולות אינן נקודתיות.

ד. דסקית אלומיניום בתוספת גופים לא נקודתיים

- נתונים שני גופים זהים בצורת תיבה, מדוד את מימדי התיבה ואת מסתה.
- הנח את הגופים על דסקית האלומיניום במרחק h ממרכזה, מדוד את זמן המחזור.

מתוך השוואת זמני המחזור עם הגופים ובלעדיהם ותוך שימוש במשפט שטיינר חשב את מומנט ההתמד של התיבות יחסית לציר העובר דרך מרכז המסה.



השווה עם הערך המחושב מתוך מימדי התיבות $I = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$.

חזור על המדידה כאשר הגופים מונחים בזוויות שונות ביחס לדסקית, מהי מסקנתך ?