4. חישוב שגיאות

1. מבוא

נניח שאנו מעונינים לדעת את ערכו האמיתי של גודל פיסיקלי מסוים, לצורך כך אנו מבצעים מדידה. המצב האידיאלי הוא שתוצאת המדידה אכן שווה לערך האמיתי, אך בפועל, בכל מדידה ישנה שגיאה שמקורה עשוי להיות באדם המודד (כגון זמן התגובה וכד׳), במכשיר המדידה (רמת הדיוק של המכשיר או כיולו) או בגורמים חיצוניים שלא נלקחו בחשבון. יתירה מזאת, אין באפשרותנו לדעת האם יש שגיאה ומהו ערכה מפני שאיננו יודעים את הערך האמיתי. כל שביכולתנו לעשות הוא: לנסות ולהעריך את רמת הדיוק שבמדידה ומתוך כך לדעת מה עשויה להיות שגיאת המדידה ומהו תחום הערכים שבו נמצא הערך האמיתי. ככל שהמדידה מדויקת יותר, השגיאה קטנה יותר והסיכוי שהערך המדוד ישקף נכונה את הערך האמיתי גבוה יותר.

מטרתו של תדריך זה היא ללמוד על המקורות האפשריים לשגיאות, לדעת להעריך את השגיאה בכל מדידה, לדעת להעריך את השגיאה בגודל המחושב מתוך גדלים מדודים ולבסוף לדעת כיצד להציג את תוצאת המדידה והערכת השגיאה באופן הגיוני.

2. הערכת השגיאה

אנו מבחינים בין שני סוגי שגיאות מדידה שגיאה שיטתית ושגיאה אקראית.

<u>שגיאה שיטתית:</u>

שגיאה שיטתית היא שגיאה קבועה במהלך הניסוי, כלומר שגיאה המסיטה את כל התוצאות בניסוי באותה מידה ובאותו כיוון. ישנם שלשה גורמים אפשריים לשגיאה שיטתית:

- אי דיוק במכשיר המדידה - לדוגמא, במדידת אורך באמצעות סרגל, ייתכן שהסרגל עצמו אינו מדויק והמרווחים בין השנתות קטנים או גדולים מהערך האמיתי.
- שגיאה של האדם המודד - לדוגמא זמן התגובה של האדם המפעיל שעון גורם לסטיה פחות או יותר קבועה בכל הפעלה או עצירה של השעון.
- גורמים חיצוניים שלא נלקחו בחשבון - כגון זרמי אוויר במעבדה, שינויי טמפרטורה ממקום למקום במעבדה וכד׳.

כאשר אנו יודעים להעריך את גודלה וכיוונה של שגיאה שיטתית, ניתן ״לתקן״ את תוצאת המדידה בהתאם ולבטל את השגיאה. לעתים ידוע לנו כיוונה של השגיאה ולא גודלה, וגם כאן נוכל לקבל חסם מכוון אחד, לדוגמא אם ידוע שהשעון ממהר

אז ברור שהזמן האמיתי קצר יותר מהזמן הנמדד בשעון. דרך מקובלת לקיזוז שגיאה שיטתית היא לבצע מדידה הפרשית (דיפרנציאלית), כלומר אם בשתי מדידות קיימת אותה סטייה, אז ההפרש בין תוצאות המדידה שווה להפרש בין הערכים האמיתיים והשגיאה השיטתית מקוזזת.

<u>שגיאה אקראית:</u>

שגיאה אקראית היא שגיאה שאינה קבועה לא בגודלה ולא בכיוונה, כלומר תוצאת המדידה יכולה להיות גדולה או קטנה מהערך האמיתי. יתירה מזאת, אם נחזור על מדידת אותו גודל מספר פעמים, תתקבל בכל פעם תוצאה שונה במקצת.
קיימים שני סוגים של שגיאות אקראיות:

שגיאות מכשיר - אי ודאות של מכשיר המדידה, שלעולם איננו בעל דיוק מוחלט. לדוגמא, סרגל שלוח השנתות שלו מחולק למילימטרים איננו יכול למדוד אורך בדיוק של מאיות מילימטר.

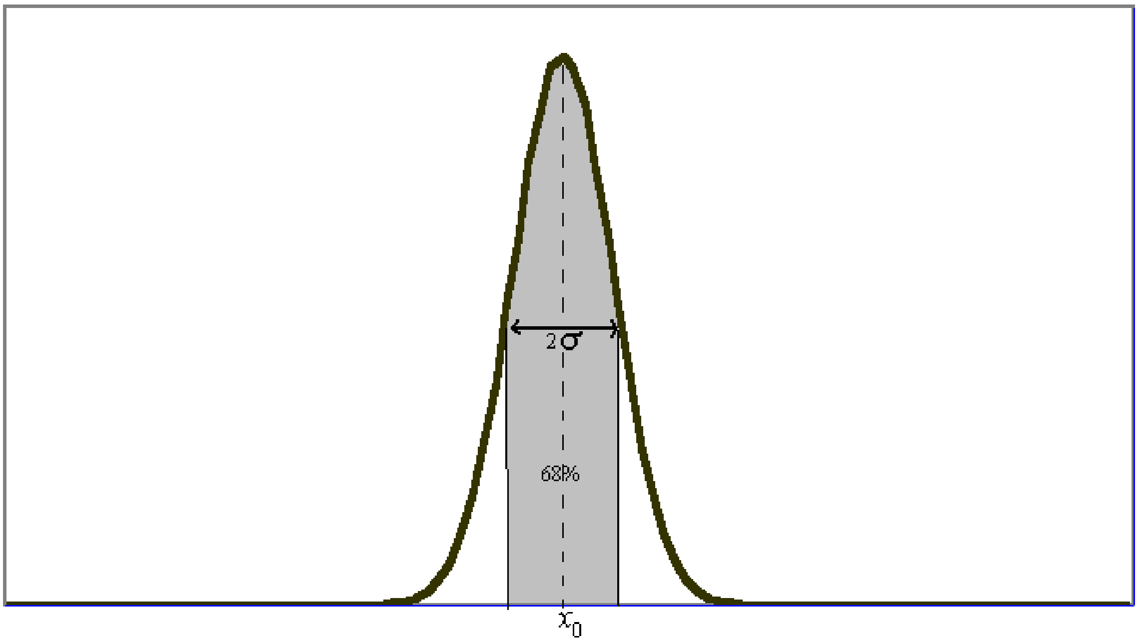
שגיאה סטטיסטית - תנודות סטטיסטיות בתהליך המדידה של הגודל הנמדד. לדוגמא, במדידת זמן המחזור של מטוטלת, יכול להיות הפרש אקראי בין תחילת תנועת המטוטלת לבין זמן הפעלת השעון. כמו כן , זרמי אוויר אקראיים משנים את זמן מחזור המטוטלת מפעם לפעם.

<u>הערכת שגיאת המכשיר</u> - את שגיאת המכשיר נעריך ע״י רגישות המכשיר. רגישות המכשיר היא המרחק בין השנתות הרגישות ביותר. לדוגמא, רגישות סרגל המחולק למילימטרים היא מילימטר, כלומר לא ניתן למדוד באמצעות הסרגל מרחקים הקטנים ממילימטר. כאשר אנו מודדים אורך באמצעות הסרגל, תוצאת המדידה תהיה הערך של השנתה הקרובה ביותר לגודל הנמדד, כלומר אנו מעגלים את תוצאת המדידה ומזניחים במדידה זו מרחקים הקטנים ממחצית המילימטר ולכן ישנה שגיאה אקראית של מחצית המילימטר בכל קריאה. מדידת אורך מתבצעת למעשה ע״י קריאת הערך בשתי נקודות ולכן הערכת השגיאה הכוללת במדידת האורך תהיה של מילימטר אחד כלומר רגישות הסרגל. במכשיר מדידה דיגיטלי, רגישות המכשיר היא הגודל אותו מייצגת הסיפרה הימנית ביותר בתצוגה הדיגיטלית. בדרך כלל נניח כי מכשיר המדידה מדויק והשגיאה נובעת רק מרגישות המכשיר, אך לעתים מכשיר המדידה עצמו עלול להיות לא מדויק. במכשירי מדידה דיגיטליים מספק היצרן בדרך כלל הערכה של שגיאת המכשיר, הערכה זו נתונה באחוזים.

לדוגמא: במדידת מתח באמצעות מד-מתח דיגיטלי נמדדה התוצאה 10.32kV. רגישות המכשיר היא הסיפרה הימנית, כלומר 0.01kV ואילו בהוראות היצרן מופיע כי שגיאת המכשיר בסקלת מדידה זו היא של 1% , כלומר במדידה זו תיתכן שגיאה של 0.1kV . במקרה זה רגישות המכשיר זניחה, והערכת השגיאה תהיה של 0.1kV.
כאשר מבצעים מספר מדידות של אותו גודל נמדד, נעריך את שגיאת המכשיר כשגיאה המקסימלית מבין כל המדידות:

$$\Delta_m = \max\{\Delta x_i\} \qquad (1)$$

<u>הערכת השגיאה הסטטיסטית</u> - על מנת להעריך את השגיאה הסטטיסטית עלינו לבצע מספר מדידות של הגודל הנמדד. במידה והשגיאה הסטטיסטית גדולה מרגישות המכשיר, נקבל בכל מדידה תוצאה שונה. אם נחזור על המדידה פעמים רבות, נראה שתוצאות המדידה מתפלגות התפלגות נורמלית. אם נשרטט גרף של הסיכוי לקבלת ערך מסוים כפונקציה של הערכים הנמדדים נקבל עקומה דמוית פעמון הנקראת גאוסיאן ראה ציור 1.



ציור 1: גרף פעמון להתפלגות נורמלית

התפלגות נורמלית מאופינת ע"י שני פרמטרים: התוחלת x_0 וסטיית התקן σ, הערכים מפוזרים בצורה סימטרית סביב ערך התוחלת , כך ש 68% מהערכים נמצאים בתחום $(x_0-\sigma, x_0+\sigma)$.

מקובל להניח שערך התוחלת x_0 מייצג בצורה הטובה ביותר את הערך האמיתי של הגודל הנמדד.

בפועל איננו מבצעים מספר גדול מאד של מדידות אלא מספר סופי N, ועלינו להעריך מתוך מספר סופי של מדידות מהו ערך התוחלת x_0 ומהי השגיאה בהערכה זו. את ערך התוחלת נעריך ע״י הממוצע החשבוני $\bar{x}$ של כל תוצאות המדידה

$$x_0 \approx \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (2)$$

את סטיית התקן של ההתפלגות נעריך ע״י סטיית התקן של המדידות שביצענו

$$\sigma \approx s_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (3)$$

ניתן להראות שהערכת השגיאה הסטטיסטית אינה עולה על $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

<u>הערכת השגיאה הכוללת</u> - כדי להעריך את גודל השגיאה האקראית הכוללת, עלינו לדעת להעריך את שני סוגי השגיאות. להערכת השגיאה האקראית הכוללת נבחר את השורש של סכום הריבועים של שגיאת המכשיר והשגיאה הסטטיסטית.

$$\Delta x = \sqrt{{\Delta_m}^2 + \frac{\sigma^2}{N}} \qquad (4)$$

<u>דוגמא</u>

בניסוי שבו נמדד אורך מסוים באמצעות סרגל בוצעו 10 מדידות. התוצאות היו: 10.0, 10.1, 10.3, 9.9, 9.6, 10.0, 10.1, 9.9, 10.0, 10.0, התוצאות ניתנות בס״מ ואילו רגישות הסרגל היא 0.1 ס״מ.

על מנת להעריך את התוחלת נחשב את הממוצע

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 9.99\text{cm}$$

את שגיאת המכשיר נעריך ע״י רגישות המכשיר כלומר 0.1 cm

נחשב את סטיית התקן:

$$\sigma \approx s_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} = 0.179 \text{ cm}$$

הערכת השגיאה הסטטיסטית תהיה

$$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.0566 \text{ cm}$$

הערכת השגיאה הכוללת היא

$$\Delta x = \sqrt{0.1^2 + 0.0566^2} = 0.1149\text{cm}$$

3. רישום התוצאות

בסעיף הקודם הערכנו את השגיאה ע״י 0.1149 ס״מ, האם יש למספר זה משמעות ? אם גודלה של השגיאה הוא 0.1 ס״מ האם יש משמעות לכך שבנוסף יש שגיאה של 0.0149 ס״מ? מובן שלא. משמעותה של השגיאה היא שישנו סיכוי של 68% שהערך האמיתי יהיה בתחום (x-Δx , x+Δx), ואין זה ערך מדויק. לכן השגיאה תוצג תמיד אך ורק ע״י הספרות המשמעותיות, כלומר הספרה השמאלית ביותר השונה מאפס (לעתים נשתמש בשתי הספרות השמאליות ביותר) כאשר החלק הלא משמעותי בהערכת השגיאה יעוגל. בדוגמא שבסעיף הקודם הערכת השגיאה תהיה 0.1 ס״מ.
מה לגבי הערך המדוד? גם כאן אין משמעות לספרות המיצגות גודל הקטן מהשגיאה, לכן, נעגל את התוצאה כך שהספרות הימניות ביותר תהיינה מקבילות לספרות המשמעותיות בשגיאה. בדוגמא הקודמת נעגל את התוצאה עד לסקלת המילימטרים כלומר 10.0 ס״מ. התוצאה הסופית תירשם כ x=10.0±0.1cm .

לעתים נתענין גם בשגיאה היחסית $\frac{\Delta x}{x}$, באמצעותה ניתן לרשום את התוצאה כ- x=10.0cm±1%.

<u>לסיכום:</u>

1. נמדוד/נחשב את הגודל המבוקש (מדידה בודדת או ממוצע) ונעריך את השגיאה (שגיאת מכשיר ושגיאה סטטיסטית) , בשלב זה נשמור על כל הספרות. לדוגמא: x=428.268cm Δx =2.847cm.
2. נעגל את השגיאה לספרות משמעותיות בלבד Δx =3 cm.
3. נעגל את הערך המבוקש בהתאם לספרות המשמעותיות בשגיאה x=428cm.

4. נרשום את התוצאה x=428±3cm או x=428cm±0.7%.
5. בשני מקרים נשמור שתי ספרות משמעותיות בשגיאה :
   א. כאשר עיגול השגיאה ישנה אותה בצורה משמעותית. לדוגמא 100 ס״מ במקום 140 ס״מ, תהליך העיגול משנה את השגיאה ב 28%.
   ב. כאשר השגיאה היחסית גדולה מ 10%, לדוגמא :
   x=34.9±12.6sec , אם נעגל לסיפרה אחת נקבל
   x=30±10sec וזהו עיוות גדול. לכן נעגל ל x=35±13sec.

4. הערכת השגיאה בפונקציה של הגודל הנמדד

בדרך כלל אנו מעוניינים לחשב גדלים פיסיקליים מתוך גדלים נמדדים. כגון : חישוב סינוס של זווית כאשר מדדנו את הזווית או חישוב נפח של קוביה אשר מדדנו את אורך מקצועה. השאלה העומדת בפנינו היא כיצד נעריך את השגיאה בפונקציה לאחר שהערכנו את השגיאה במשתנה הנמדד ? בניסוח מתמטי : $f(x)$ היא פונקציה של המשתנה x, הערכת השגיאה במשתנה x היא Δx מה תהיה הערכת השגיאה בפונקציה f כלומר מהו Δf ?

הפתרון המוצע הוא להשתמש בדיפרנציאל של f על מנת לחשב את הערכת השגיאה כלומר $\Delta f = \left|\frac{df}{dx}\right|\Delta x$. הערך המוחלט נכנס לכאן מפני שאנו מתיחסים להערכת השגיאה כאל גודל חיובי ואילו כיוון השגיאה נכנס בסימן ±.

מה קורה כאשר הפונקציה מחושבת מתוך מספר משתנים בלתי תלויים ? כאן השגיאה בפונקציה $f(x,y,z,...)$ מושפעת מהשגיאות בכל אחד מהמשתנים. הדיפרנציאל של f מוגדר במקרה כזה ע״י $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + ...$,

כאשר הנגזרות הן נגזרות חלקיות כלומר בביטוי $\frac{\partial f}{\partial x}$ גוזרים את f לפי x כאשר לשאר המשתנים מתיחסים כאל קבועים. השגיאה החלקית בפונקציה ביחס למשתנה x תהיה $\Delta_x f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x$. הערכת השגיאה המקסימלית בפונקציה תהיה

סכום השגיאות החלקיות , אך מכיוון שהגדלים x,y,z הם בלתי תלויים, כלומר השגיאה בכל אחד מהם יכולה להיות בכוון שונה חלקן יגדילו את השגיאה בפונקציה וחלקם יקטינו, אין הצדקה לקחת את סכום הערכים המוחלטים וניתן לחשב את השגיאה בפונקציה ע"י השורש של סכום ריבועי השגיאות החלקיות

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2} \qquad (5)$$

לדוגמא: במדידת נפחו של גליל נמדדו הגדלים הבאים :

רדיוס הגליל: r=5.0±0.1cm

גובה הגליל: h=13.0±0.1cm

נפח הגליל נתון ע"י הביטוי: $V=\pi r^2 h$,

נציב את הערכים שנמדדו ונקבל: V=1020.98cm^3.

על מנת להעריך את השגיאה בנפח נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi rh \qquad ; \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

הערכת השגיאה תהיה:

$$\Delta V = \sqrt{(2\pi rh\Delta r)^2 + (\pi r^2 \Delta h)^2} = 41.58\text{cm}^3$$

נעגל את השגיאות לספרות משמעותיות עד לספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית:

ΔV=41.6 cm^3

ובהתאם נרשום את הנפח: V=1021.0 cm^3.

לסיכום: V=(1021±41.6)cm^3 = 1021cm^3±4%.

5. סיכום

תהליך של מדידה יכלול את השלבים הבאים:

1. ביצוע N מדידות x_i והערכת שגיאת המדידה Δx_i.
2. חישוב הממוצע $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

וחישוב שגיאת המכשיר $\Delta_m = \max\{\Delta x_i\}$.

3. חישוב סטיית התקן $\sigma \approx s_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$.
4. הערכת שגיאת המדידה $\Delta x = \sqrt{{\Delta_m}^2 + \frac{\sigma^2}{N}}$.
5. חישוב הפונקציה של הגדלים הנמדדים והערכת השגיאה

$$f = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2}\ .$$

6. עיגול ספרות משמעותיות ורישום התוצאה הסופית.

5. ניתוח גרפי של תוצאות

1. הצגת התוצאות בגרף

כאשר אנו מודדים שני גדלים פיסיקליים התלויים זה בזה, נוח להציג את תוצאות המדידה באופן גרפי. אם ביצענו סדרת מדידות בהן מדדנו בכל פעם את ערכו של המשתנה x ושל המשתנה y וקיבלנו אוסף של זוגות סדורים $(x_i\ ,\ y_i)$, נוח להציג תוצאות אלו במערכת צירים קרטזית (x,y).

הגרף המייצג את תוצאות הניסוי יכלול:

1. כותרת לגרף כולו. כגון - "זמן מחזור של מטוטלת כפונקציה של המסה".
2. כותרת לכל ציר המציינת מהו הגודל המסומן על הציר והיחידות בהן נמדד. כגון– "T זמן מחזור של מטוטלת בשניות".
3. כל מדידה תסומן ע"י צלב, מרכז הצלב יהיה בנקודה (x_i,y_i) ואילו זרועות הצלב יציינו את הערכת השגיאה במדידה. זרוע הצלב המקבילה לציר x תהיה באורך של Δx לכל כיוון. קצה הצלב ייחסם ע"י קו קטן המאונך לזרוע המציין כי גודל הצלב מתאים לגודל השגיאה. במידה והשגיאה קטנה מדי ולא ניתן לציירה במדויק, נשרטט במקום הנקודה צלב קטן, אך הפעם לא ייחסם הצלב בקצותיו על מנת לציין שגודלו אינו מבטא את גודלה של השגיאה אלא רק מציין שקיימת שגיאה.
4. גודלו של הגרף ייקבע כך שיכיל את כל הנקודות, אך יתחום אותם בלי להשאיר שוליים רחבים מדי.

<u>התאמת קו לנקודות</u>

כאשר אנו סבורים ששני גדלים פיסיקליים x ו-y תלויים זה בזה עפ"י קשר מסוים שניתן ע"י התיאוריה, נוכל לבדוק קשר זה באמצעות הצגה גרפית ומדידת פרמטרים מתוך הגרף. לדוגמא נניח שהתיאוריה אומרת כי $y=ax^2+bx$, אנו מבצעים ניסוי בו נמדדים ערכים של x ו-y ומשרטטים את הנקודות במערכת צירים קרטזית. עכשיו ברצוננו למצוא את הפרבולה הטובה ביותר שתתאים לתוצאות ובאמצעותה למצוא את ערכי הפרמטרים a ו-b. פעולה זו של התאמת פרבולה (או כל תלות אחרת) עשויה להיות מסובכת ומורכבת. לעומת זאת, כאשר אנו מצפים לתלות לינארית בין המשתנים, יש באפשרותנו להתאים קו ישר לנקודות בצורה טובה יחסית. לכן נשאף תמיד להביא את התלות למצב שנוכל להתאים לה גרף לינארי.

דוגמאות:

1. אנו מצפים לתלות $y = ax^2 + bx$, נחלק את המשוואה ב-x $\frac{y}{x} = ax + b$, ולכן נשרטט בגרף את $\frac{y}{x}$ כפונקציה של x.

2. אנו מצפים לתלות $y = bx^a$, נוציא Log מהמשוואה ונקבל $\log y = a\log x + \log b$, ולכן נשרטט בגרף את Log y כפונקציה של Log x.

3. אנו מצפים לתלות $y = be^{ax}$, נוציא ln משני אגפי המשוואה ונקבל $\ln y = ax + \ln b$, נשרטט את ln y כפונקציה של x.

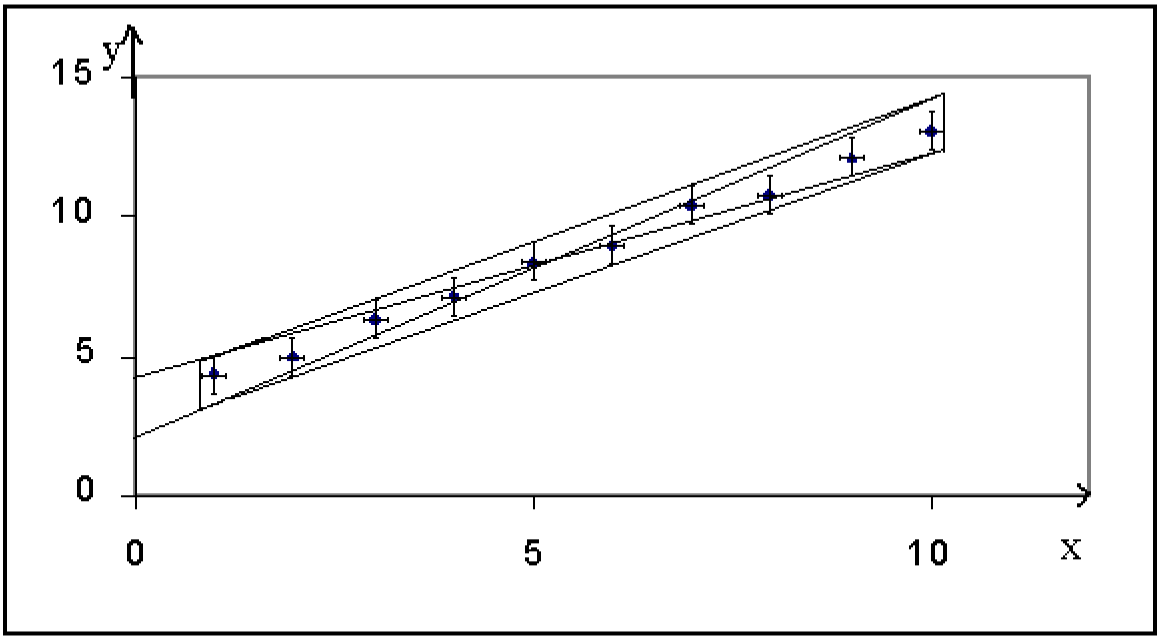
2. התאמת גרף לינארי

כאשר אנו מנסים להתאים גרף לינארי לאוסף של נקודות במערכת צירים המתארות תוצאות של מדידה, עלינו לקחת בחשבון גם את השגיאה בכל מדידה וכן להבחין בכך שישנו פיזור של התוצאות סביב הקו הישר. עלינו למצוא את הקו הישר הטוב ביותר שיתאים לתוצאות. בניסוי מעשי עלולות להיות תוצאות חריגות אשר בוודאות אינן מתאימות לתיאוריה אותה אנו מעוניינים למדוד, אם נכניס לשיקולים גם את הנקודות החריגות אנו עלולים לעוות את התוצאה. כאן יש מקום להפעלת שיקול דעת להחליט איזו נקודה היא חריגה ולמחוק אותה מהגרף.

<u>שיטת המקבילית להתאמת קו ישר</u>

בשיטה זו אנו מנסים להעריך באופן גיאומטרי מהו הקו הישר הטוב ביותר לסדרת התוצאות הנתונה. יתרונה של השיטה הוא בפשטותה וביכולתה לתת הערכה מהירה של הפרמטרים המבוקשים ושגיאתם.

לקבלת הפרמטרים המבוקשים משרטטים שני קווים מקבילים החוסמים את מרבית הצלבים הנראים הגיוניים, ואת שני אלכסוניה של המקבילית שנוצרה כמתואר בציור 2.



ציור 2 : שיטת המקבילית

כאשר מציירים את המקבילית, השאיפה היא לצייר את המקבילית בעלת השטח הקטן ביותר. (טעות נפוצה היא להתחשב רק בתוצאות הקיצוניות, הרעיון הוא להתחשב בכל התוצאות ההגיוניות במידה שווה).

כעת מודדים את שיפועי האלכסוני של המקבילית, נסמן את השיפוע הגדול ב $a_{\max}$ ואת השיפוע הקטן ב $a_{\min}$. השיפוע של הקו האידיאלי נמצא בין שני אלה ולכן נגדיר

$$\bar{a} = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} \quad ; \quad \Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} \qquad (6)$$

התוצאה תירשם ע"י $a = \bar{a} \pm \Delta a$. חשוב לציין שהשיפוע הינו גודל בעל מימדים פיסיקליים ולכן אינו טנגנס הזווית בין הקו לציר-x. מדידת השיפוע תיעשה ע"י בחירת שתי נקודות על הקו וחישוב השיפוע ע"י

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (7)$$

בדרך כלל הפרמטר החשוב הוא שיפוע הקו, אך לעתים אנו מעוניינים גם בפרמטר b אותו ניתן למדוד מנקודת החיתוך עם ציר y. לצורך זה נמשיך את אלכסוני המקבילית עד שיחתכו את ציר y כמתואר בציור 2, נסמן את נקודות החיתוך

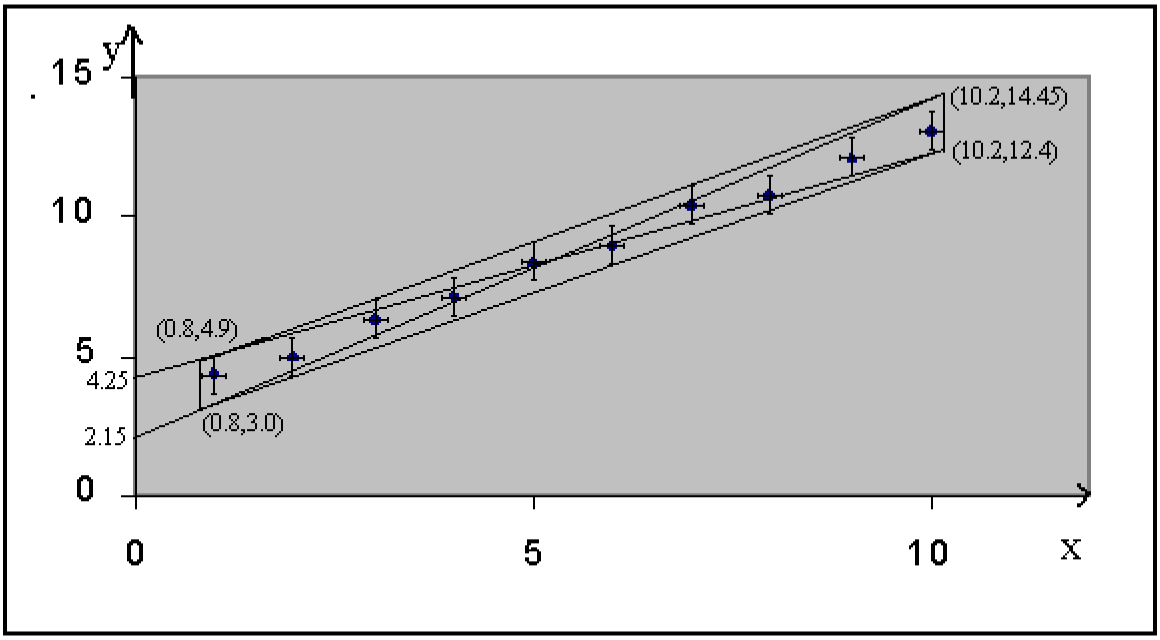
כ b_{max} ו- b_{min} ושוב נתיחס לממוצע כגודל המבוקש ונעריך את השגיאה ע״י מחצית ההפרש.

לדוגמא: בניסוי מסוים נמדד הגודל y כפונקציה של הגודל x. התיאוריה מנבאת שהקשר הצפוי הוא לינארי $y=ax+b$. תוצאות הניסוי היו:

10.0	9.0	8.0	7.0	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0	x
13.1	12.1	10.8	10.5	9.0	8.5	7.1	6.4	5.0	4.4	y

כאשר שגיאות המדידה: $\Delta x = 0.7$, $\Delta y = 0.7$ קבועות לכל המדידות.

ציור 3 מראה את הנקודות (x,y) כאשר גודל הצלבים הוא כגודל השגיאה לשני הכוונים. המקבילית חוסמת את הצלבים, אך אינה מכילה שטח נוסף שאינו כולל צלבים ושהיה מגדיל בהרבה את הערכת השגיאה.



ציור 3: דוגמא למציאת קו ישר באמצעות מקבילית

הפרמטרים a ו-b חושבו מהמקבילית בדרך הבאה:

$$a_{max} = \frac{14.45 - 3.0}{10.2 - 0.8} = 1.22 \; ; \qquad a_{min} = \frac{12.4 - 4.9}{10.2 - 0.8} = 0.8$$

ולכן:

$$\overline{a} = \frac{1.22 + 0.8}{2} = 1.01 \qquad ; \qquad \Delta a = \frac{1.22 - 0.8}{2} = 0.21$$

$b_{\max} = 4.25$; $b_{\min} = 2.15$

ולכן:

$$\bar{b} = \frac{4.25 + 2.15}{2} = 3.2 \quad ; \quad \Delta b = \frac{4.25 - 2.15}{2} = 1.05$$

התוצאה הסופית (לאחר עיגול ספרות) תרשם כך:

$$\underline{a = 1.0 \pm 0.2} \quad ; \quad \underline{b = 3.2 \pm 1.0}$$

הערה: יש לזכור כי ברוב המקרים לגדלים a, b יהיו ***יחידות***, ולכן חשוב לציין אותן ליד הערך המספרי.

חסרונה הבולט של שיטת המקבילית הוא שהיא שיטה גרפית סוביקטיבית לחלוטין המסתמכת על העברת קווים עפ"י העין. יתרונה הוא בכך שזו שיטה פשוטה ומהירה. כאשר משתמשים במחשב לצורך עיבוד הנתונים, ניתן להשתמש בשיטת הריבועים המינימליים להתאמת קו ישר.

שיטת הריבועים המינימליים להתאמת קו ישר

שיטה זו היא שיטה אנליטית למציאת הקו הישר הטוב ביותר המתאים לאוסף של נקודות (x_i,y_i). תקפות הנוסחאות שנציג כאן מותנית בכך שהשגיאה בערכי x קטנה ביחס לשגיאה בערכי y, $\Delta x << \Delta y$. נניח שאנו מחפשים קו ישר מהצורה $y=ax+b$, הסטיה בין כל נקודת מדידה לקו הישר נתונה ע"י המרחק האנכי $d_i=y_i-(ax_i+b)$. המדד שבו נשתמש לקו הטוב ביותר הוא סכום ריבועי הסטיות

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N} d_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2 \qquad (8)$$

צמד הפרמטרים שעבורם S^2 יהיה מינימלי יתארו את הקו הטוב ביותר. אם נגזור את S^2 לפי a ו-b ונשווה לאפס נקבל שתי משוואות מהן נוכל לקבוע את הערכים של הפרמטרים a ו-b.

הנוסחאות המתקבלות הן:

$$(9) \quad a = \frac{1}{A}\left(N \cdot S_{xy} - S_y \cdot S_x\right) \quad ; \quad b = \frac{1}{A}\left(S_{xx} \cdot S_y - S_{xy} \cdot S_x\right)$$

כאשר:

$$S_x \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i \quad ; \quad S_y \equiv \sum_{i=1}^{N} y_i \quad ; \quad S_{xx} \equiv \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 \tag{10}$$

$$S_{yy} \equiv \sum_{i=1}^{N} {y_i}^2 \quad ; \quad S_{xy} \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$; \quad A \equiv N \cdot S_{xx} - {S_x}^2$$

הנוסחאות עבור הערכת השגיאה בפרמטרים הן:

$$\Delta a = \Delta y \sqrt{\frac{N}{A}} \quad ; \quad \Delta b = \Delta y \sqrt{\frac{S_{xx}}{A}} \tag{11}$$

כאשר הגודל המסומן כ Δy הוא המקסימלי מבין שני הפרמטרים:

1. השגיאה הממוצעת $\Delta \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \Delta y_i$

2. סטיית התקן עבור הפיזור

$$\begin{aligned} \sigma_y &\equiv \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} {d_i}^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(S_{yy} + a^2 S_{xx} + N b^2 - 2a S_{xy} - 2b S_y + 2ab S_x \right)} \end{aligned} \tag{12}$$

דוגמא להתאמת קו ישר בשיטת הריבועים המינימליים

נניח שבניסוי מסוים נמדדו ערכי x וערכי y , והתקבלו התוצאות הבאות :

x	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
y	14.5	16.0	18.5	20.0	22.5	24.5	26.0	27.0	29.0

נניח כי אין שגיאה בערכי x ואילו השגיאה בערכי y היא $\Delta y_i=0.2$.

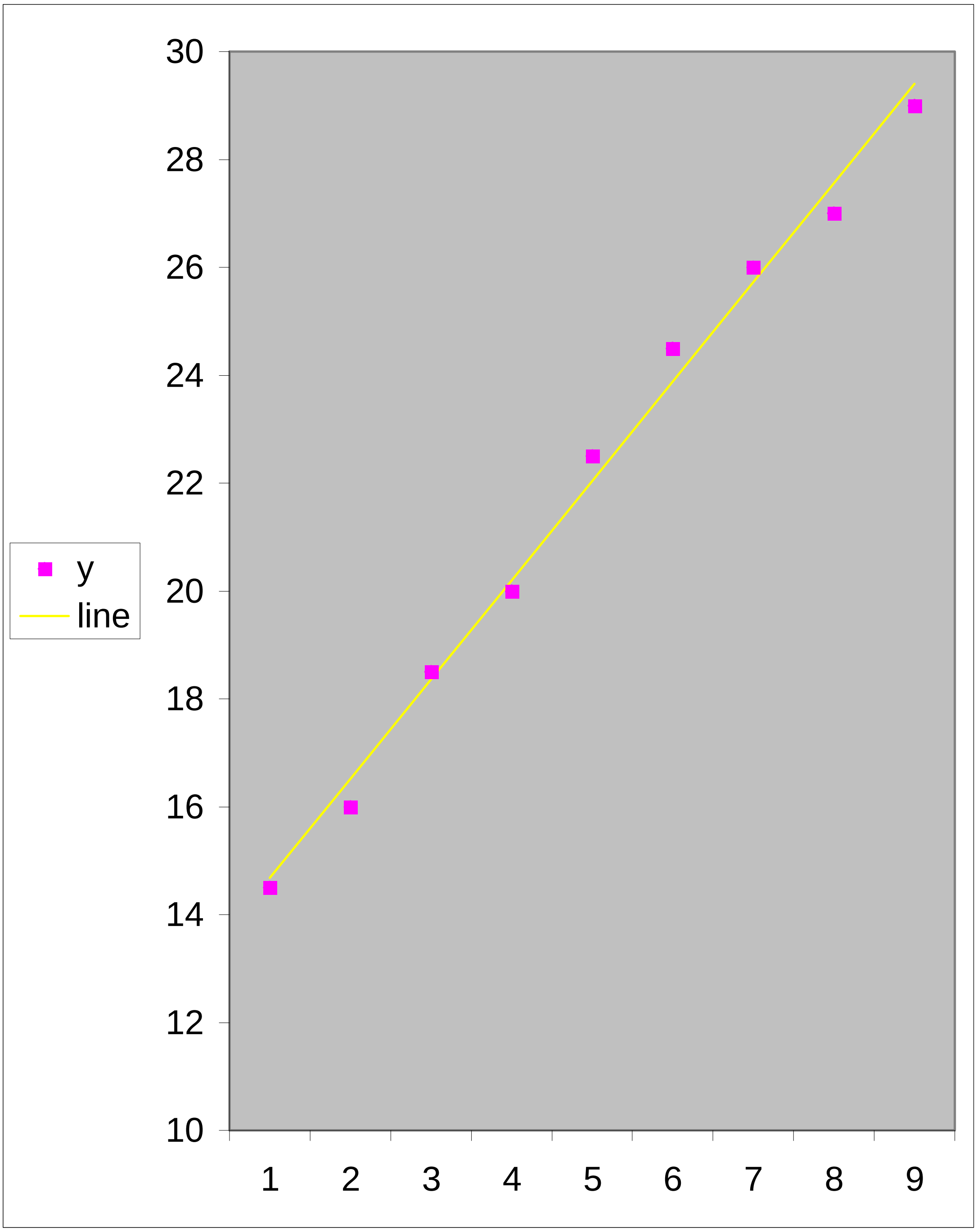
כדי לחשב את הפרמטרים עבור הקו הישר נכניס את הנתונים למחשב ונחשב את הגדלים המופיעים במשוואות (8-11). (העיבוד נעשה באמצעות תוכנת Excel)

index	x	y	x^2	y^2	xy
1	2	14.5	4	210.25	29
2	3	16	9	256	48
3	4	18.5	16	342.25	74
4	5	20	25	400	100
5	6	22.5	36	506.25	135
6	7	24.5	49	600.25	171.5
7	8	26	64	676	208
8	9	27	81	729	243
9	10	29	100	841	290
	Sx	Sy	Sxx	Syy	Sxy
	54	198	384	4561	1298.5
	A	a	b		
	540	1.841667	10.95		
	sigma	<Ey>	Ey	Ea	Eb
	0.462267	0.2	0.462267	0.059678	0.389817

הערכים עבור הפרמטרים לאחר עיגול ספרות משמעותיות הם :

$$a=1.84\pm0.06 \qquad ; \qquad b=11.0\pm0.4 \qquad (13)$$

התוצאות מופיעות בגרף בציור 4 :



ציור 4 : נקודות ביחד עם הקו הישר הטוב ביותר עפ"י הריבועים המינימליים.