

תנע זוויתי

מילות מפתח:

תנע זוויתי, מומנט התמד (Inertia), מומנט כוח (Torque), מהירות זוויתית, תאוצה זוויתית.

הציוד הדרוש: מחשב, ממשק, מערכת למדידת תנע זוויתי, גלגלת ממחושבת, 2 דיסקים, מחזיק משקולות מפלסטיק, משקולות, פלטה מלבנית מתכתית (שחורה).

מטרות הניסוי:

- להכיר מושגים הקשורים לתנועה סיבובית ותאוצה זוויתית.
- לבחון את שימור התנע הזוויתי בהתנגשות פלסטית.
- גלגולי אנרגיה גרביטציונית בקינטית סיבובית וקינטית העתקה.

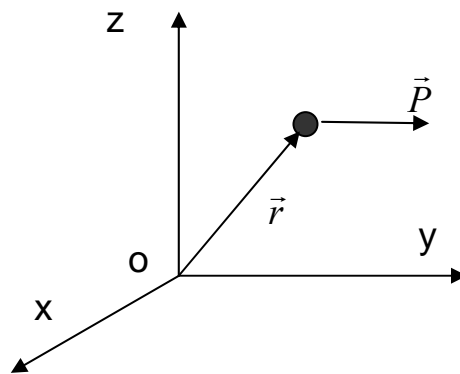
1. תיאוריה

1.1 תנע זוויתי

התנע הזוויתי של חלקיק בעל תנע קווי \vec{P} יחסית לנקודה O מוגדר כ-

$$(1) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

כאשר \vec{r} הוא הווקטור המכוון מנקודה O אל מקום החלקיק (איור 1). התנע הזוויתי של מערכת של חלקיקים הוא סכום וקטורי של התנעים הזוויתיים של כל החלקיקים.



איור 1: התנע הסיבובי של חלקיק נקודתי

כאשר גוף קשיח מסתובב סביב ציר קבוע במהירות זוויתית $\vec{\omega}$, וקטור התנע הזוויתי הינו בכיוון ציר הסיבוב

$$(2) \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

כאשר I הוא מומנט ההתמד של הגוף יחסית לציר הסיבוב. בדומה לחוק השני של ניוטון הקובע כי שינוי התנע הקווי של חלקיק ייתכן רק אם פועל כוח עליו, כך גם שינוי התנע הזוויתי בזמן של גוף ייתכן רק אם פועל עליו מומנט כוח חיצוני והקשר נתון ע"י

$$(3) \quad \bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

כאשר $\bar{\tau}$ הוא סכום מומנטי הכוח החיצוניים הפועלים על הגוף. במערכת אשר לא פועלים עליה מומנטי כוח חיצוניים התנע הזוויתי הכולל נשמר. תנע זוויתי הוא וקטור ופירושו של דבר שהתנע הזוויתי שומר הן על גודלו והן על כוונו. לדוגמא: מצפן ג'ירוסקופ מכיל בתוכו סביבון אשר מסתובב במהירות גבוהה ושומר על כוונו וכך משמש כמצפן.

1.2 מומנט התמדה

החוק השני של ניוטון $F=ma$ קובע כי יש צורך בכוח על מנת לשנות את מהירותו של גוף. מסת הגוף היא למעשה ההתמד של הגוף, כלומר ככל שמסת הגוף גדולה יותר הגוף יתמיד בתנועתו ודרוש כוח גדול יותר כדי לשנות את מהירותו. באופן דומה, כאשר גוף קשיח מסתובב סביב ציר מסוים יש לגוף נטייה להמשיך בתנועתו הסיבובית, מומנט ההתמד של הגוף הוא האנלוגיה של המסה כלומר ככל שמומנט ההתמד גדול יותר יש צורך במומנט כוח גדול יותר על מנת לשנות את מהירות הסיבוב של הגוף. החוק השני של ניוטון עבור תנועה סיבובית של גוף קשיח בעל מומנט התמד I אשר מופעל עליו מומנט כוח τ הוא $\bar{\tau} = I\bar{\alpha}$, כאשר α היא התאוצה הזוויתית. את מומנט ההתמד מחשבים באופן הבא: כאשר נתון אוסף של מסות נקודתיות (m_i) הנמצאים במרחקים שונים מציר הסיבוב (r_i) מומנט ההתמד מוגדר ע"י:

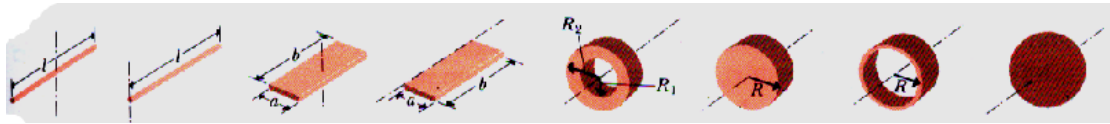
$$(4) \quad I = \sum_i m_i r_i^2$$

כאשר הגוף הנתון איננו נקודתי ניתן לחלק את הגוף לאלמנטי מסה קטנים m_i , שמרחקו של כל אלמנט מסה מציר הסיבוב הוא r_i ומומנט ההתמד יהיה:

$$(5) \quad I = \int r^2 dm$$

מומנט ההתמד תלוי בנוסף למסה גם במיקומו ובכוונו של ציר הסיבוב. איור 2 מכיל מספר דוגמאות של מומנטי התמדה:

-תנע זוויתי-



$$\frac{1}{12}ML^2 \quad \frac{1}{3}ML^2 \quad \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \quad \frac{1}{3}Ma^2 \quad \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \quad \frac{1}{2}MR^2 \quad MR^2 \quad \frac{2}{5}MR^2$$

איור 2: מומנטי התמד של מספר גופים, ציר הסיבוב משורטט בקו מקוקו.

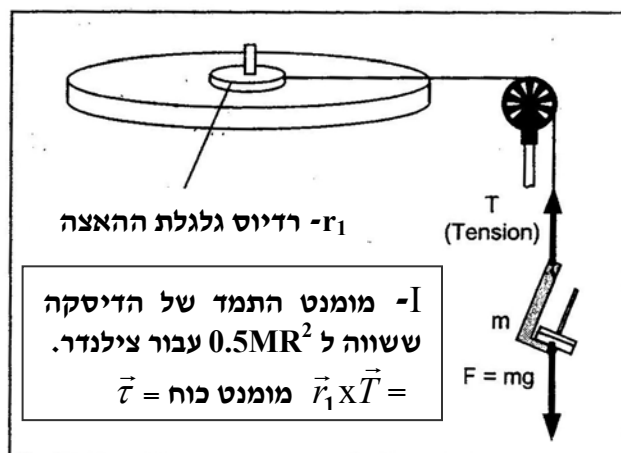
לרוב, נוח לחשב את מומנט ההתמד של גוף עבור ציר סיבוב העובר דרך מרכז המסה. כאשר ציר הסיבוב אינו עובר דרך מרכז המסה אלא בציר אחר המקביל לציר העובר דרך מרכז המסה, נוכל להיעזר במשפט שטיינר לחישוב מומנט ההתמד:

$$(6) \quad I = I_{c.m.} + Mh^2$$

כאשר h הוא המרחק ההסטה בין הציר העובר דרך מרכז המסה לציר האחר M מסת הגוף. מומנט התמד הוא גודל אדיטיבי, כלומר, מומנט ההתמד של גוף קשיח הבנוי משני חלקים הוא סכום מומנטי ההתמד של כל אחד מהחלקים (כאשר כל המומנטים מחושבים יחסית לאותו ציר).

1.3 מערכת המדידה

איור 3 מתאר באופן סכמטי את המערכת הניסיונית עם הכוחות שפועלים עליה בזמן שהמערכת מסתובבת.



איור 3: תיאור סכמטי של המערכת עם הכוחות הפועלים עליה

נכתוב את המשוואות המתארות את התנועה הקווית והזוויתית בהזנחת מומנט ההתמד של הגלגלת החכמה :

$$(7) \quad mg - T = ma$$

$$(8) \quad \tau = Tr_1 = I\alpha_1$$

הקשר בין התאוצה הקווית והזוויתית :

$$(9) \quad a = r_1\alpha_1$$

על ידי הצבה ניתן לחלץ את התאוצה הזוויתית של הדיסקה וגם כן את התאוצה הקווית של המסה.

$$(10) \quad T = mg - mr_1\alpha_1$$

$$(11) \quad \tau = mgr_1 - mr_1^2\alpha_1 = I\alpha_1$$

$$(12) \quad mg \cdot r_1 = I \cdot \alpha_1 + m \cdot r_1^2 \alpha_1$$

$$(13) \quad \alpha_1 = \frac{mgr_1}{I + mr_1^2} \approx \frac{mgr_1}{I}$$

בנוסחה (13) ניתן לבצע את הקירוב מכיוון שהביטוי mr_1^2 קטן ביחס למומנט ההתמד של הדיסקה I.

1.4 שאלות הכנה

1. מומנט ההתמד של מוט דקיק, סביב ציר העובר במרכז המסה שלו וניצב אליו הוא: $I = \frac{1}{12}ML^2$. תוך שימוש במשפט שטיינר, חשב את מומנט ההתמד של אותו מוט סביב ציר העובר בקצה המוט וניצב לו.

ב. חשב את מומנט ההתמד העובר ב-L/4 מאחד הקצוות.

2. באחד משלבי הניסוי המערכת המסתובבת מורכבת משני דסקות אחת בסיסית ודיסקה נוספת מונחת עליה ולהם מרכז משותף. חשב את מומנט ההתמד של המערכת המסתובבת.

3. נניח כי הדיסקה הבסיסית מסתובבת במהירות זוויתית $\omega_1 = 10 \text{ rad/sec}$ ומפילים עליה טבעת בעלת אותו מומנט התמד (I) אשר נדבקת לדיסקה מייד (כתוצאה מכוח חיכוך). אם לשני הגופים יש מרכז משותף חשב :

א. אילו חוקי שימור מתקיימים (תנע קווי, אנרגיה קינטית, תנע זוויתי)?

ב. חשב את המהירות הזוויתית של המערכת.

ג. בטא באמצעות I את כמות החום המכסימלית שיכולה להיווצר בהתנגשות.

4. נתונים שני גלילים בעלי אותו רדיוס ומסה, אחד הגלילים מלא והשני חלול דק דופן שנהם מתגלגלים מאותה נקודה התחלתית וממצב מנוחה לאורך מישור משופע. בהגיעם לתחתית המישור מהירותו של מי מהם תהיה גבוהה יותר? נמק!

2. מהלך הניסוי

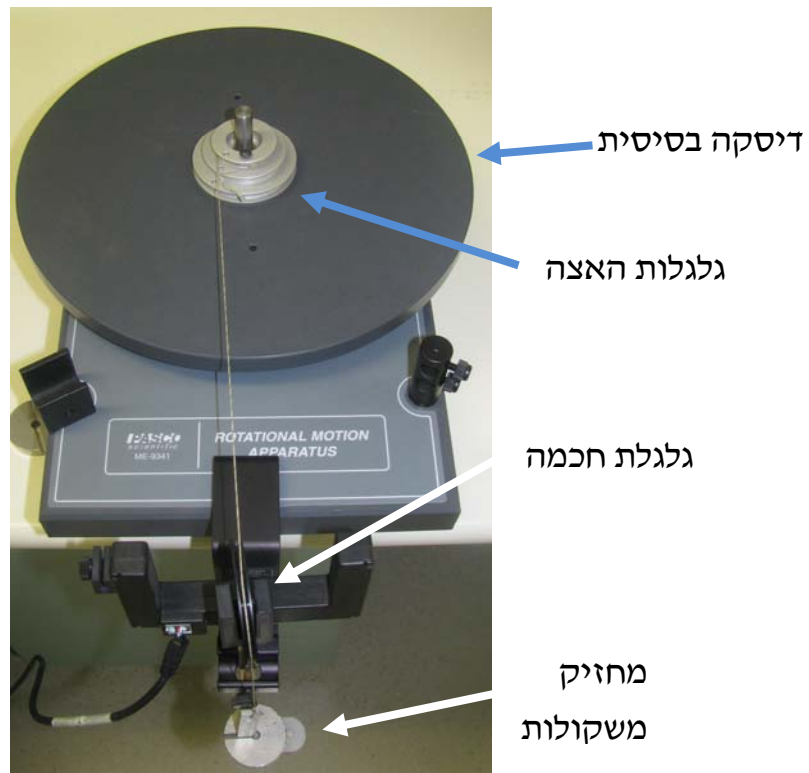
כאשר כוח גורם לגוף להסתובב, התאוצה הזוויתית של הגוף תלויה בארבעה גורמים:

1. הגודל של הכוח.
2. כיוון הפעולה של הכוח.
3. הנקודה על הגוף שעליה פועל הכוח.
4. מומנט ההתמד של הגוף.

הניסוי שלנו מחולק לשלשה חלקים:

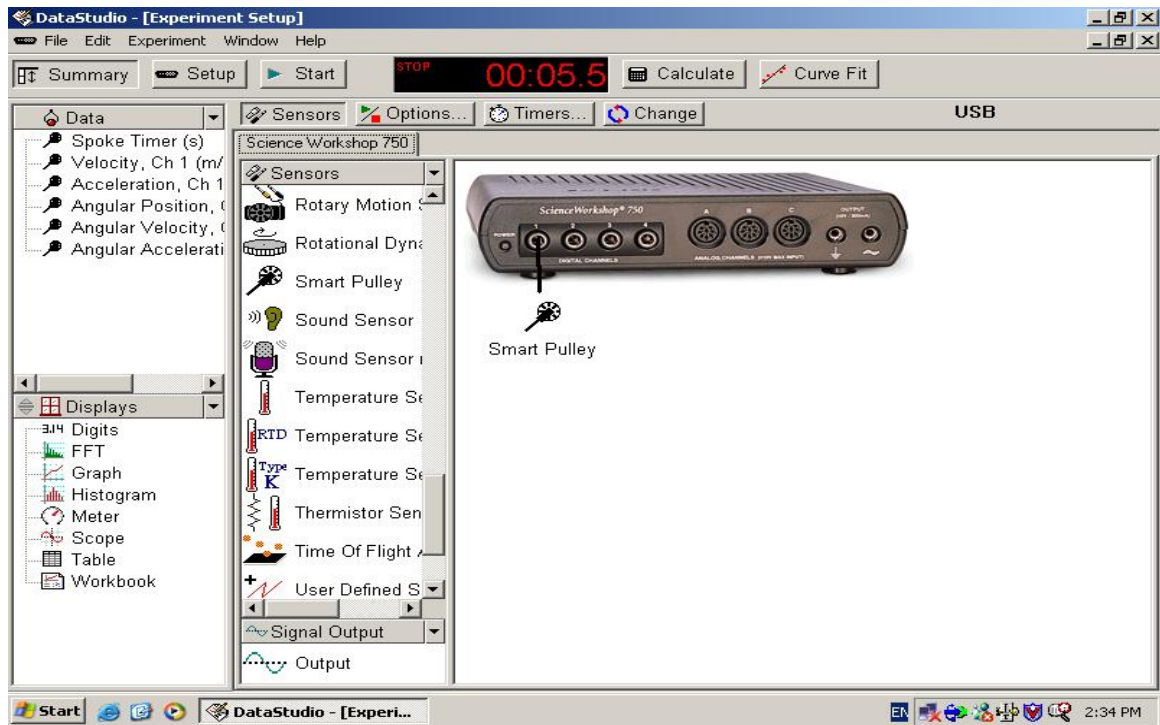
2.1 בדיקת התרומה הכמותית של כל אחד מארבעת הגורמים שנזכרו לעיל לתאוצה

1. בנה את המערכת המתוארת באיור 4. שים את הדיסקה הבסיסית על המוט כך שגלגלות ההאצה למעלה.



איור 4: המערכת הניסיונית.

2. שים את הפלס על הדיסקה וודא שהיא אופקית ומאוזנת.



3. חבר את הגלגלת החכמה (smart pulley) לממשק מערכת המדידה.

איור 5: תיאור חלון הממשק המתאים לניסוי.

4. חבר את הגלגלת החכמה (smart pulley) לממשק מערכת המדידה.

5. בחלון ה- setup גרור את ה- smart pulley מרשימת החיישנים לכניסה מספר 1 בממשק המדידה (איור 5).

6. לחץ לחיצה כפולה על הגלגלת החכמה על מנת לפתוח את חלון

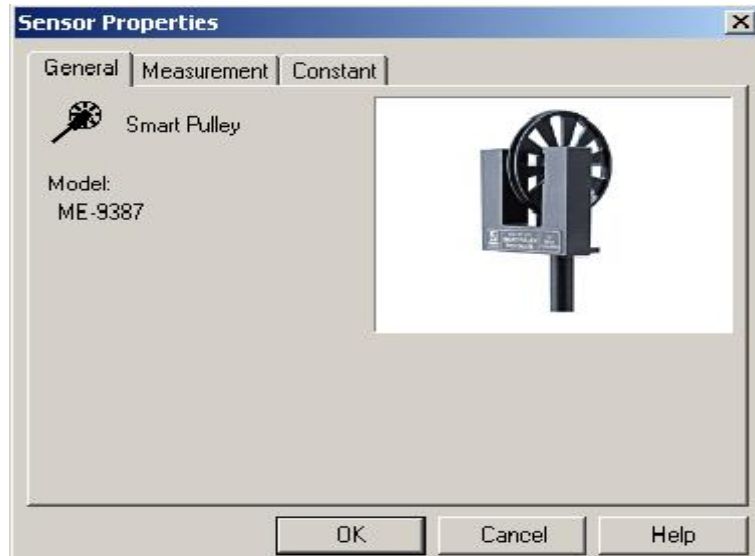
sensor properties (ראה איור 6). עקרון הפעולה של הגלגלת החכמה: הגלגלת מותקנת בין הזרועות של שער אופטי (ראה איור 6). בין הזרועות של השער, משודרת קרן אינפרא אדומה. הגלגלת עשויה 10 זרועות שביניהם 10 רווחים. כאשר הגלגלת מסתובבת בין הזרועות של השער האופטי, קרן האינפרא אדומה נגלית ונחסמת לסירוגין. בשעה שהקרן חסומה, מופעל מתח של 5 וולט. כאשר הקרן נגלית, יורד המתח לאפס. כאשר הקרן חסומה, נדלקת נורית הבקרה של השער האופטי. היקף הגלגלת הוא 15 ס"מ במדויק.

7. לחץ על measurement ובחר את הגדלים הנמדדים: (1 Angular position

(2 Angular velocity (rad/s), (3 Angular acceleration (rad/s²).

8. לחץ על constant ובחר באופציה Spoke Angle Spacing והמחשב יבחר את

ה- Value ל 36 מעלות (לגלגלת יש 10 זרועות). סגור את חלון ה SETUP.



איור 6: חלון הגדרת הגלגלת החכמה.

9. קח חוט באורך כמטר, קשור אותו בקצה הראשון לגלגלות ההאצה הקטנה ולפף אותו סביבה.
10. וודא שהחוט הקשור לגלגלת ההאצה ועובר מעל הגלגלת החכמה ניצב לרדיוס גלגלת ההאצה בנקודת ההשקה, וודא גם שהוא מקביל לשולחן הניסוי.
11. בקצה השני של החוט קשור מחזיק משקולות והעמס עליו מסה של 50 gr.
12. עזוב את המסה, תן לה לרדת מעט תוך סיבוב הדיסקה ומייד לחץ על start.
13. לחץ על stop לפני שהמסה פוגעת ברצפה.
14. חזור על 10, 11 ו 12 עבור שתי מסות נוספות של 100 גרם ו 150 גרם.
15. חזור על 9, 10, 11 ו 12 עם הגלגלת בעלת הרדיוס הבינוני בשלושת המסות.
16. חזור על 9, 10, 11 ו 12 עם הגלגלת בעלת הרדיוס הגדול בשלושת המסות.

3. ניתוח תוצאות

בנה במחברתך טבלה הדומה לטבלה I והכנס את הנתונים (עם השגיאות) של הניסויים שלך לתוכה העזר בשלבים הבאים:

מצא את התאוצה הזוויתית שנמדדה ע"י שיפוע גרף המהירות הזוויתית והכנס את הערכים לטבלה. שים לב: התאוצה הזוויתית הנמדדת הינה התאוצה הזוויתית של הגלגלת החכמה.

א. לחישוב התאוצה הזוויתית של הדיסקה העיקרית אתה צריך להשתמש בקשר הנתון במשוואה 14. התאוצה הזוויתית של כל אחת מגלגלות ההאצה שווה לתאוצה הזוויתית של הדיסקה ולכן התאוצה של הדיסקה נתונה במשוואה הבאה

$$(14) \quad \alpha_1 = \frac{\alpha r}{r_1}$$

כאשר α_1 הוא התאוצה הזוויתית של הדיסקה ושל גלגלת ההאצה, r_1 רדיוס גלגלת ההאצה, α ו r הם התאוצה הזוויתית והרדיוס של הגלגלת החכמה בהתאמה. ניתן למצוא את הנתונים המדויקים של r_1 ו r ע"י טבלה II שנמצאת בסוף הפרק, עבור r השתמש ברדיוס הקטן. חשב את α_1 והכנס את הערכים של α_1 ו- r_1 לטבלה I.

ב. חשב את המתוחות ע"י משוואה (10) והוסף את התוצאות לטבלה.

ג. הראה שבעזרת הגרף של $\frac{T}{m}$ (כאשר m הוא קבוע) כפונקציה של α , ניתן

למצוא את הרדיוס r (מספיק להראות זאת בשביל אחת המסות).

את הקשר בין הגדלים ניתן למצוא בנוסחה (10) תוך שילוב עם נוסחה (14).

ד. בנה גרף של התאוצה הזוויתית של הדיסקה (α_1) כפונקציה של רדיוס גלגלת ההאצה, עבור תוצאות המדידה של $m = 50g$. חזור על התהליך גם עבור $m = 100g$. בעזרת נוסחה (13) חשב את מומנט ההתמד.

ה. בנה גרף של התאוצה הזוויתית של הדיסקה כפונקציה של הכוח הפועל עליה עבור רדיוס גלגלת האצה הקטן. חזור על התהליך גם עבור רדיוס האצה בינוני. בעזרת נוסחה (13) חשב את מומנט ההתמד.

ו. השווה את התוצאות שקיבלת בסעיפים ד' וה' (סה"כ 4 גרפים) לתוצאה הידוע לפי הוראות היצרן.

-תנע זוויתי-

התאוצה הזוויתית של הדיסקה $\alpha_1(\text{rad/sec}^2)$	התאוצה הזוויתית של הגלגלת החכמה $\alpha(\text{rad/sec}^2)$	רדיוס הגלגלת החכמה $r(\text{cm})$	רדיוס גלגלת ההאצה $r_1(\text{cm})$	המתיחות בחוט $T(\text{N})$	משקל המסה $mg(\text{N})$

טבלה I : ריכוז של תוצאות המדידה של הניסוי

רוחב (ס"מ)	אורך (ס"מ)	מומנט התמד (ק"ג-מ ²)	רדיוס (ס"מ)	רדיוס חיצוני (ס"מ)	רדיוס בתוך החריץ (ס"מ)	מסה (גר')	גוף
-	-	7.50×10^{-3}	R1=12.7	-	-	991	דיסקה בסיסית
-	-	7.22×10^{-3}	R2=12.7	-	-	894	דיסקה נוספת
-	-	18.6×10^{-7}	-	r=2.54	r=2.38	-	גלגלת חכמה
-	-	-	r ₁ =1.5 r ₁ =2 r ₁ =2.5	-	-	-	גלגלות האצה
5.1	22.2	2.98×10^{-3}	-	-	-	690	לוח מתכתי
-	-	2.64×10^{-3}	5.4	6.4		701	טבעת מתכתית

טבלה II : נתונים עבור הציוד שהשתמשתם בניסוי

3.1 שימור אנרגיה גרביטציונית ורוטציונית

במערכת שלנו ישנו גלגול אנרגיה מאנרגיה פוטנציאלית גרביטציונית לאנרגיה קינטית רוטציונית ואנרגיה קינטית של העתקה.

השינוי באנרגיה הפוטנציאלית הגרביטציונית נתון בביטוי $E_p = mgh$ כאשר E_p הוא השינוי באנרגיה פוטנציאלית, m - מסת הגוף, g - תאוצת הנפילה החופשית ו- h הפרש הגבהים.

האנרגיה הקינטית של העתקה נתונה בביטוי $E_{kt} = \frac{1}{2}mV^2$, כאשר E_{kt} היא האנרגיה הקינטית של העתקה, m - מסת הגוף ו- V מהירות הגוף.

האנרגיה הקינטית הרוטציונית נתונה בביטוי $E_{kr} = \frac{1}{2}I\omega_1^2$, כאשר E_{kr} היא האנרגיה הקינטית הרוטציונית, I - מומנט התמד ו- ω_1 - המהירות הזוויתית של הדיסקה.

חזור על סעיפים 1-12 מהפרק הקודם (עבור $m = 50g$) בפרויקט חדש.

נגדיר כמה גדלים בתוכנה (שים לב שהיחידות הם MKS):

בחר בחלון calculate, ורשום את המשוואה הנ"ל:

$$h = -r * z \quad \text{א.}$$

כאשר: h - הפרש הגובה בין המצב העכשווי של המסה והמצב ההתחלתי.

r - רדיוס הגלגלת החכמה.

z - זווית הסיבוב של הגלגלת החכמה.

לחץ accept. לחץ על הלשונית לצדו של r והזן אותו כ-constant לפי הנתון

בטבלה II.

לחץ על הלשונית לצדו של z והגדר אותו כ-data measurement. בחר ב-Angular

position.

לחץ accept. כעת מוגדר המשתנה החדש h .

ב. להגדרת משתנה חדש לחץ calculate ובחר ב-new. הכנס את המשוואה:

$$E_p = mgh$$

כאשר: E_p - השינוי באנרגיה הפוטנציאלית

m - המסה של הגוף

g - תאוצת הנפיל החופשית.

קבע את m ו- g כ-constant והזן את הנתונים.

את h הגדר כ-data measurement ובחר את המשתנה h שהגדרת מקודם.

ג. הגדר משתנה חדש: $V=rw$

כאשר V - המהירות הקווית של המסה; w - המהירות הזוויתית של הגלגלת החכמה, r - רדיוס הגלגלת החכמה.
הגדר את w כ- data measurement ובחר Angular velocity. את r הזן כ- constant כמו מקודם.

ד. הגדר משתנה חדש: $E_{kt} = \frac{1}{2}mV^2$

כאשר E_{kt} - האנרגיה הקינטית של העתקה עבור המסה היורדת.

הגדר את m כ- constant ו V כ- data measurement ובחר את המשתנה V .

ה. הגדר משתנה חדש: $w1 = \frac{wr}{r1}$

כאשר ω_1 הוא המהירות הזוויתית של הדיסקה ושל גלגלת ההאצה, r_1 רדיוס גלגלת ההאצה, ω ו r הם המהירות הזוויתית והרדיוס של הגלגלת החכמה בהתאמה.

הגדר את r ו $r1$ כ- constant, ואת w כ- data measurement ובחר Angular velocity.

ו. הגדר משתנה חדש: $E_{kr} = \frac{1}{2}I\omega_1^2$

כאשר E_{kr} - האנרגיה הקינטית הרוטציונית של הדיסקה. (האנרגיה הקינטית הרוטציונית של הגלגלת החכמה זניחה).

הגדר את I כ- constant (לפי הנתונים של היצרן), ואת $w1$ כ- data measurement ובחר את המשתנה $w1$.

ז. הגדר משתנה חדש: $E_{total} = E_{kr} + E_{kt} + E_p$

הגדר את E_{kr} כ- data measurement ובחר את המשתנה E_{kr} .

הגדר את E_{kt} כ- data measurement ובחר את המשתנה E_{kt} .

הגדר את E_p כ- data measurement ובחר את המשתנה E_p .

4. ניתוח תוצאות

- א. צייר את העקומות של האנרגיות: E_{kR} ו E_{kT}, E_p כפונקציה של הזמן באותה מערכת צירים (בגרף אחד). בחן את העקומות המתקבלות וקבע אם צורתם (קבוע, ליניארי, פרבולי...) תואמת את התיאוריה.
- ב. בנה גרף של סה"כ האנרגיה הגרביטציונית והקינטית בשני סוגיה כפונקציה של זמן (E_{total}).
- ג. במצב אידיאלי ובהעדר חיכוך סכום האנרגיות צריך להיות אפס (חוק שימור האנרגיה). בניסוי זה הזנחנו את החיכוך. לפי התוצאות שהתקבלו בגרף מסעיף ג, בחן אם אכן הפסדי האנרגיה בחיכוך קטנים ואכן ניתנים להזנחה.

4.1 התנגשויות עם גוף מסתובב

לגוף שמסתובב יש תנע זוויתי הנתון במשוואה 2. כשמפילים, בצורה אנכית, על דיסקת הבסיס, את הדיסקה הנוספת, אין שום מומנט כוח שפועל על המערכת המסתובבת בכיוון הסיבוב (חוץ ממומנט כוח חיכוך עם הציר). ולכן מתקיים חוק שימור תנע זוויתי:

$$(15) \quad L_i = L_f$$

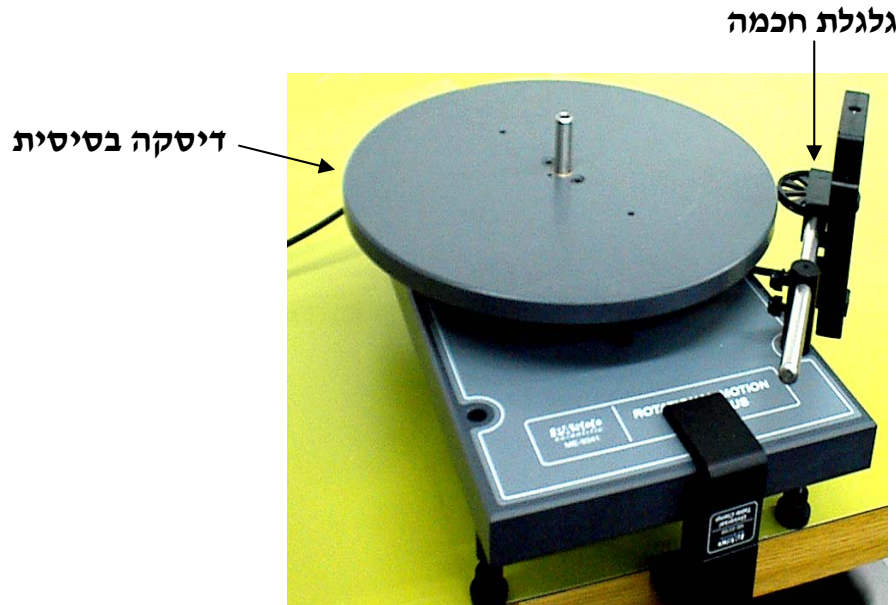
כאשר L_i מסמן את התנע הזוויתי לפני התנגשות ו- L_f מסמן את התנע הזוויתי אחרי התנגשות.

$$(16) \quad I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

כאשר I_i ו- ω_i מסמנים את מומנט ההתמד והמהירות הזוויתית של הגוף המסתובב לפני התנגשות בהתאמה, ו- I_f ו- ω_f מסמנים את מומנט ההתמד והמהירות הזוויתית של הגוף המסתובב אחרי התנגשות בהתאמה.

1. בנה את המערכת המתוארת באיור 7. שים את הדיסקה העיקרית על המוט כך שגלגלות ההאצה פונות למטה, וחבר את הגלגלת החכמה כך שהיקפה יהיה במגע עם הדיסקה הבסיסית, וכל סיבוב לדיסקה הבסיסית גורם לגלגלת החכמה להסתובב.

2. חזור על הסעיפים 2-7 מהפרק הקודם.



איור 7: מערכת הניסוי בהתנגשויות.

3. סובב את הגלגלת הבסיסית ביד, לחץ על start לאחר כ-5 שניות הפל את הדיסקה הנוספת על דיסקת הבסיס ולאחר כ 5 שניות לחץ על stop.
4. הצג את המהירות הזוויתית של הדיסקה כפונקציה של זמן וחשב אותה **רגע לפני ההתנגשות ורגע מיידי אחרי ההתנגשות**.
5. חשב את מומנט ההתמד של המערכת המסתובבת לפני הפלת הגוף ולאחר הפלתו.
6. בדוק אם התנע הזוויתי נשמר, הסבר את תשובתך.
7. חשב את סך האנרגיה (אנרגיה רוטציונית) לפני ההתנגשות ואחריה. בדוק האם האנרגיה נשמרת, הסבר את תשובתך (רמז: כדי לסובב את הדיסקה הנוספת מופעל עליה כוח כלשהו). בדוק מה היחס בין האנרגיות לפני ואחרי ההתנגשות כאשר יש שימור תנע זוויתי (באופן תיאורטי). לא לפי תוצאות הניסוי). השווה לתוצאת הניסוי.